Т. А. МАТВЕЕВА, Н. Г. РЫЖКОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Часть II

Екатеринбург
2005

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Часть II

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук В.И. Зенков

Екатеринбург
2005

УДК 510(076.5)
ББК 22.1 я73
М 33

Рецензенты:
кафедра методики преподавания математики УрГПУ
(канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников);
д-р физ.-мат. наук А.Н. Бабушкин (УрГУ)

Авторы: Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

М 33 Высшая математика: конспект лекций / Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова. Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 138 с.

ISBN 55-321-00576-1

В работе представлены 16 лекций по курсу высшей математики, содержание которых соответствует учебным программам II семестра большинства инженерно-технических специальностей.

Ил. 55.

УДК 510(076.5)
ББК 22.1 я73

ISBN 55-321-00576-1

Оглавление

Введение

Настоящая работа представляет собой компактное изложение вопросов курса высшей математики, предусмотренных учебными программами большинства инженерно-технических специальностей во втором семестре. Учебный материал структурирован на 16 лекций, каждая из которых носит законченный характер, строго выверена по объему на реальное лекционное время, имеет четкую внутреннюю структуру, что является важным для системного восприятия курса.

Стиль изложения учебного материала соответствует типу работы, поэтому в ней нет глав и параграфов, нет громоздких числовых обозначений определений, теорем, формул. Особое внимание уделяется обеспечению согласованности терминологии и обозначений с базовыми задачниками.

Данный конспект предназначен главным образом для студентов, но может быть полезен и для молодых преподавателей высшей школы с методической точки зрения.

Приложением к конспекту лекций является CD-ROM, содержащий электронную версию конспекта. Последняя пронизана системой гиперссылок различных уровней, поэтому особенно удобна к использованию в период подготовки к экзаменам. Электронный конспект по сравнению с традиционным обладает повышенной информационной функцией, открыт для оперативных изменений и дополнений, что является важным для преподавателей и студентов в организации самостоятельной работы, может быть использован в системе дистанционного образования.

I. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Лекция 1. Производная

Содержание

1. Производная функции.
2. Геометрический смысл производной.
3. Механический смысл производной.
4. Простые правила и формулы дифференцирования (взятия производной).
5. Производная обратной функции.
6. Производная сложной функции.
7. Производная неявной функции.
8. Логарифмическая производная.
9. Производная функции, заданной параметрически.
10. Производные высших порядков.
11. Физический смысл второй производной.

1.1. Производная функции

Пусть $f(x)$ определена на интервале (a,b), $x \in (a,b)$ – фиксированная точка. Прибавим к x любое число Δx так, чтобы точка $x+\Delta x \in (a,b)$.

Δx – ***приращение аргумента*** в точке x;
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – ***приращение функции***;
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ – отношение приращений.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ зависит от Δx (x – фиксированное значение).

Определение

Производной функции $f(x)$ ***в точке*** x называется предел отношения приращений

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

при условии, что он существует.

Обозначение

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Пример 1

$y = \sin x$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Пример 2

$y(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1.$

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

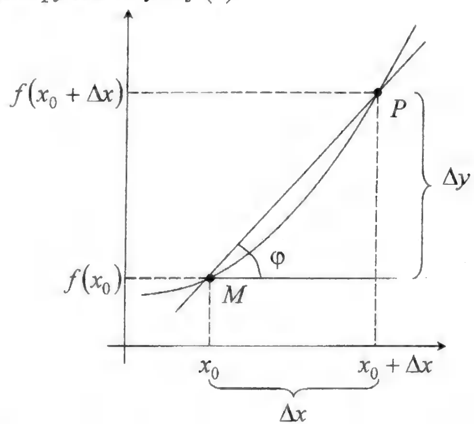
$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e}$$

Частный случай:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

1.2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.



Точки графика $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, $M(x_0, f(x_0))$ принадлежат секущей MP.

Определение

Касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0 называется предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$ ($P \to M$).

Теорема

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$,

то график функции в точке x_0 имеет касательную с угловым коэффициентом $f'(x_0)$.

Доказательство

Угловой коэффициент секущей равен $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \to 0$, то $\operatorname{tg}\varphi \to \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Таким образом,

1) существует предельное положение секущей;
2) $k_{касат} = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Определение

Нормалью к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $M(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной в этой точке.

Угловой коэффициент нормали связан с угловым коэффициентом касательной:

$$k_н = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Уравнение нормали к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).}$$

Пример

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = 1$.

Решение

$y(1) = 0$.

$y' = \frac{1}{x}$, $y'(1) = 1$.

$\boxed{y = x - 1}$ – уравнение касательной.

$\boxed{y = -(x - 1)}$ – уравнение нормали.

1.3. Механический смысл производной

Рассмотрим движение точки по прямой.

$S = f(t)$ – перемещение точки в момент времени t.

$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ – ***средняя скорость*** движения точки за промежуток времени Δt.

$v = f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ – ***мгновенная скорость*** в момент времени t.

Пример

Пусть закон движения точки задан формулой $S = \frac{gt^2}{2}$. Скорость движения находится путем дифференцирования функции S: $v(t) = gt$.

1.4. Простые правила и формулы дифференцирования

1. $f(x)=c$, $f'(c)=0$.
2. $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$.
3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$.
4. $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)- f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, где $g(x)\neq 0$.

Пример

$y = 3\sin x + 5\log_2 x - 10$.

$y' = 3\cos x + \dfrac{5}{x}\log_2 e$.

1.5. Производная обратной функции

Теорема

Если

1. $f(x)$ – строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0,
2. $\exists f'(x_0)\neq 0$,

то

1. $\exists\left(f^{-1}(y)\right)$ в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$,
2. $\boxed{\exists\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}}$.

Доказательство

Из условия 1 следует существование непрерывной обратной функции $x = f^{-1}(y)$ в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$*.

Приращению аргумента Δy соответствует приращение функции Δx. Рассмотрим их отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \qquad (1)^{**}$$

* См. конспект лекций, ч. 1, лекция 22.

** В каждой лекции используется независимая нумерация формул.

Из строгой монотонности функции $f(x)$ следует, что условие $\Delta y \neq 0$ влечет за собой $\Delta x \neq 0$.

Устремим Δy к нулю. Из непрерывности функции $x = f^{-1}(y)$ следует, что $\Delta x \to 0$.

Но при $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$, следовательно, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \to \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (см. (1)),

т.е. $\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, что и требовалось доказать.

Применение

1. $y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$.

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}(\log_a e)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

2. $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3. $$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

4. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

5. $$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

1.6. Производная сложной функции

Теорема

Если

1. $y = f[\varphi(t)]$ – сложная функция (t – независимая переменная, φ – промежуточный аргумент),
2. $\exists f'(x_0)$ и $\varphi'(t_0)$, где $x_0 = \varphi(t_0)$,

то

$$\exists\{f[\varphi(t)]\}'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Доказательство

Рассмотрим $t_0 + \Delta t \;\Rightarrow\; \Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$.

$\Delta x \;\Rightarrow\; \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Пусть $\Delta t \to 0$.

Но так как $\exists \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta x \to 0$.

При этом $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \;\Rightarrow\; \exists \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) = \{f[\varphi(t_0)]\}'$,

что и требовалось доказать.

Замечание

Мы берем в качестве независимой переменной t, а в качестве промежуточной – x. Чаще встречается $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\boxed{y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\cdot u'(x).}$$

Пример 1

$y = e^{\operatorname{arctg} x}$, y' – ?

Решение

$y = e^u$, $u = \operatorname{arctg} x$.

$$y' = e^u \cdot u' = e^{\operatorname{arctg} x}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 2

Производная четной функции – функция нечетная.

$f(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; f'(-x) = -f'(x)$.

Доказательство
Для четной функции $y = f(|x|)$.
$y = f(u)$, $u = |x|$.
Пусть $x_1 > 0$.
$y'(x_1) = f'(u) \cdot u'(x_1) = \updownarrow$ для $x > 0, u(x) = x, u'(x) = 1 \updownarrow = f'(u) \cdot 1 = f'(|x_1|)$.
Пусть $x_2 = -x_1 < 0$.
$y'(x_2) = f'(u) \cdot u'(x_2) = \updownarrow$ для $x < 0, u(x) = -x \updownarrow = f'(u) \cdot (-1) = -f'(|x_2|) = -f'(|x_1|)$,
что и требовалось доказать.

1.7. Производная неявной функции

$y = f(x)$ – ***явная*** функция.
$F(x, y) = 0$, где y – ***неявная*** функция аргумента x.

Пример 1
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y' - ?$
Решение
а) $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = \pm\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \mp\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – равенство двух выражений или двух функций одного независимого аргумента x. Если равны функции, то равны и их производные:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Правило
Для того, чтобы найти ***первую*** производную от функции, заданной неявно, нужно ***один*** раз продифференцировать равенство, задающее эту функцию, считая y функцией аргумента x.

Пример 2

Записать уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Решение
$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$,
$y'(x_0) = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}$,

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Пример 3

$y^2 = 2px$.

$y' - ?$

Решение

$2y \cdot y' = 2p$,

$y' = \frac{p}{y}$.

1.8. Логарифмическая производная

Пусть $f(x) > 0$, $\exists f'(x)$.

Для вычисления $f'(x)$ в ряде случаев полезен прием предварительного логарифмирования выражения, задающего функцию.

Рассмотрим равенство $y = f(x)$.

Выполним его почленное логарифмирование

$$\ln y = \ln f(x).$$

Дифференцирование последнего равенства

$$[\ln y]' = [\ln(f(x))]'$$

приводит к отношению $\frac{y'}{y} = [\ln(f(x))]'$, которое называется ***логарифмической производной***.

Применение

1. $\boxed{y = x^\alpha}$, где α – любое действительное число.

$\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)' = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

2. $\boxed{y = (\sin x)^{x^2}} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln(\sin x)$.

$\frac{y'}{y} = 2x \ln(\sin x) + \frac{x^2}{\sin x} \cdot \cos x$.

$$\boxed{y' = (\sin x)^{x^2}\left(2x \ln(\sin x) + x^2 \operatorname{ctg} x\right)}$$

3. В общем случае для степенно-показательных выражений.

$$\boxed{y = u(x)^{v(x)}} \Rightarrow \ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x).$$

$$\boxed{y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\right]}$$

4. Для произведения более двух функций.

$y = \sin x \cos x \cdot x$, y' – ?

$\ln y = \ln \sin x + \ln \cos x + \ln x$;

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x \sin x \cos x\left[\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\right].$$

Производные гиперболических функций

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \operatorname{cth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$\boxed{\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x),}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x),}$$

$$\boxed{\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)},}$$

$$\boxed{\operatorname{ctgh}'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)},\ x \neq 0.}$$

Пример

$$y = \operatorname{sh}^3 5x \cdot \cos^2\frac{x}{2}.$$

$$y' = 3\operatorname{sh}^2 5x \cdot \operatorname{ch}5x \cdot 5 \cdot \cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^3 5x \cdot 2\cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \operatorname{sh}^2 5x \cdot \cos\frac{x}{2}\left(15\operatorname{ch}5x \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \operatorname{sh}5x\right).$$

1.9. Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию, заданную параметрическим способом:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае связь аргумента x со значением функции y осуществляется через параметр t. Как вычислить y'_x?

Теорема

Если

1. $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы ($\exists x'(t)$, $\exists y'(t)$) на интервале (α,β) и $x(t)$ строго монотонна на (α,β),
2. $x'(t)\neq 0 \ \ \forall t\in(\alpha,\beta)$,

то

$$\boxed{y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Доказательство

Рассмотрим систему равенств

$$y=y(t),\ t=t(x),$$

где t – промежуточный аргумент,

y – сложная функция аргумента x.

По теореме о производной сложной функции $y'_x=y'_t\cdot t'_x$. По теореме о производной обратной функции

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}.$$

Таким образом, $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, что и требовалось доказать.

Пример

$$\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3,\end{cases}\quad t\in(-\infty,0).$$

y'_x – ?

Решение

$x'_t=2t$,

$y'_t=3t^2$,

$y'_x=\dfrac{3}{2}t$.

1.10. Производные высших порядков

Определение

$f''(x)=(f'(x))'$ – ***вторая производная*** – первая производная от производной первого порядка;

$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ – ***производная n-го порядка*** – первая производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Пример 1

$y=\sin x$.

$y'=\cos x$,

$y''=-\sin x$,

$y'''=-\cos x$.

Пример 2

$y=x^n$.

$y'=n\cdot x^{n-1}$,

$y''=n(n-1)x^{n-2}$,

...

$y^{(k)}=n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}$, где $k\le n$.

Пример 3

$y=e^x$.

$y^{(n)}=e^x$.

Вторая производная от неявной функции

Пусть неявная функция y аргумента x задается равенством $F(x,y)=0$.

Правило

Для отыскания производной высшего порядка от y по x нужно соответствующее число раз дифференцировать заданное равенство, помня, что y и все ее производные являются функциями независимой переменной x.

Пример

$y^2+x^2=1$.

y'' – ?

$2y\cdot y'+2x=0 \Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}$,

$$2(y')^2+2y\cdot y''+2=0 \;\Rightarrow\; y''=-\frac{1+(y')^2}{y}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$

Вторая производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим функцию y, заданную параметрическим способом

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$$

Выше была получена формула для первой производной этой функции

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Новая задача – вычисление второй производной y''_{xx} – ?

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x=\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'_t\cdot t'_x=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

$$\boxed{y''_{xx}=\frac{y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t}{(x'_t)^3}}$$

Пример

$x=a(t-\sin t),\; y=a(1-\cos t),\; -\infty<t<+\infty.$

y'_x – ? y''_{xx} – ?

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)},$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)'}{a(1-\cos t)}.$$

1.11. Физический смысл второй производной

Пусть $x=x(t)$ – закон движения точки M по оси Ox.

Пусть v – скорость в момент времени t,

$v+\Delta v$ – скорость в момент времени $t+\Delta t$,

$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ – среднее ускорение точки за время Δt,

$v'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$ – ускорение точки в момент времени t.

$$\boxed{a=x''(t)}$$

Ускорение прямолинейного движения точки равно по величине второй производной от перемещения по времени.

Лекция 2. Дифференциал функции

Содержание

1. Дифференциал функции.
2. Приближенное вычисление малых приращений функции.
3. Дифференциалы высших порядков.
4. Основные теоремы анализа.

2.1. Дифференциал функции

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b).

$\forall x \in (a,b)\ \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$,

α – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Тогда

$$\Delta y = \underbrace{f'(x) \cdot \Delta x}_{dy} + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Введем обозначение $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

В общем случае $f'(x) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{dy}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow$

dy и Δx – бесконечно малые одного порядка.

$\alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$.

Итак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Определение

Величина $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ называется ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x.

Из равенства (1) следует, что dy – ***главная линейная часть приращения функции***.

Главная, так как остаток $\alpha\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости.
Линейная, так как dy пропорционален Δx в первой степени.

Теорема

Необходимым и достаточным условием существования дифференциала является существование производной функции.

Дифференциал независимой переменной

Рассмотрим $y = x$, $y'_x = 1$, $\Delta y = \Delta x \;\Rightarrow\; dy = \Delta x$ (см. (1)).

Вывод

$dx = \Delta x \;\Rightarrow$ дифференциал независимой переменной равен ее приращению.

С учетом полученного, $dy = y'_x \cdot \Delta x = y'_x \cdot dx$.

$$\boxed{dy = y'_x\,dx} \;-$$

– формула для вычисления первого дифференциала.

Вывод

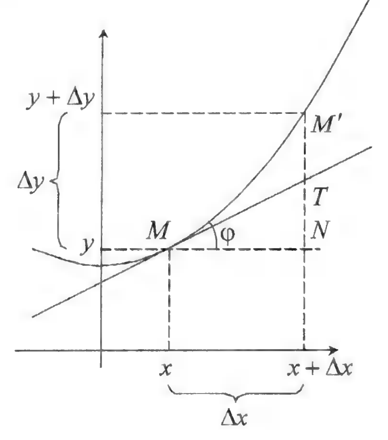
Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Отсюда

$$\boxed{y'_x = \frac{dy}{dx}} \;-$$

– производная есть отношение дифференциалов.

Геометрический смысл дифференциала



Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Точки графика – $M(x, y)$, $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

MT – касательная к графику в точке M.

В треугольнике ΔMNT: $MN = \Delta x$, $NT = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \varphi = \Delta x \cdot y'_x$. Таким образом,

$$\boxed{NT = dy.}$$

Вывод

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x есть приращение ординаты касательной к графику этой функции, когда x получает приращение Δx.

Приращение функции $NM' = \Delta y \neq NT$.

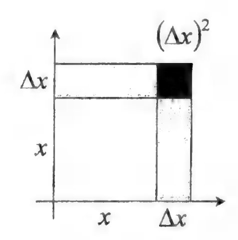
$$\boxed{\Delta y \neq dy}$$

Для вогнутой кривой (выпуклой вниз) $\Delta y > dy$.

Для выпуклой кривой (выпуклой вверх) $\Delta y < dy$.

Для линейной функции $y = ax + b$: $\Delta y = dy$.

Для функции $y = x^2$



$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

$dy = 2x \cdot \Delta x$.

Δy – площадь окрашенной части квадрата, dy – та же площадь за вычетом $(\Delta x)^2$.

Если $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$,

$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$.

$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4{,}00$.

Итак, Δy и dy отличаются на величину $\alpha = 0{,}01$, что существенно меньше Δx.

2.2. Приближенное вычисление малых приращений функции

Если Δx мало, то $\Delta f(x) \approx df(x)$.

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}$$

Геометрический смысл приближенного равенства: данная функция на участке Δx заменяется своей касательной, т.е. линейной функцией.

Пример 1

Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}1}$.

Решение

$y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

$y(x + \Delta x) - ?$

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\bigg|_{x=1} \cdot 0{,}1 = 1{,}033.$$

Пример 2

Вычислить приближенно $\sin 46°$.

Решение

$y = \sin x$, $x = 45°$, $\Delta x = 1°$.

$$\sin(45° + 1°) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}7194.$$

Свойства дифференциалов

Свойства дифференциалов аналогичны свойствам производной (предполагаем, что все рассматриваемые функции дифференцируемы).

1°. $y = c$, $y' = 0$.

$$\boxed{dy = 0}$$

2°. $y = u + v$, $y' = u' + v'$.

$$\boxed{dy = du + dv}$$

3°. $y_1 = u + c$, $y_2 = u$.

$$\boxed{dy_1 = dy_2}$$

4°. $y = cu$, $y' = cu'$.

$$\boxed{dy = c\,du} -$$

– константу можно выносить за знак дифференциала.

5°.

$$\boxed{d(uv) = v\,du + u\,dv}$$

6°.

$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}}, \; v(x) \neq 0.$$

7°. Дифференциал сложной функции.

$y = f[\varphi(x)]$, $u = \varphi(x)$, $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

$dy = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u du$.

$$\boxed{dy = f'_u\, du}$$

Сравним с формулой $dy = f'(x)dx$.

Вывод

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, при этом не важно, является этот аргумент промежуточным или независимой переменной, в этом заключается ***инвариантность*** формы первого дифференциала.

2.3. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал независимой переменной, как было показано выше, равен ее приращению $dx = \Delta x$, которое ***не зависит от*** x!

Дифференциал функции $dy = f'(x)dx$ – при фиксированном dx – зависит от аргумента x, т.е. является функцией. Поэтому можно поставить вопрос о дифференциале этой функции или дифференциале дифференциала. Дифференциал дифференциала функции – второй дифференциал функции $f(x)$ или дифференциал второго порядка.

Определения и обозначения

$d^2 f(x) = d[df(x)]$ – ***дифференциал второго порядка***;

$d^3 f(x) = d[d^2 f(x)]$ – ***дифференциал третьего порядка***;

…

$d^n f(x) = d[d^{n-1} f(x)]$ – ***дифференциал*** n***-го порядка***.

Формула для вычисления второго дифференциала

$d[df(x)] = d[f'(x)dx] =\updownarrow dx$ – константа выносится за $d \updownarrow= dx \cdot df'(x) =$
$= dxf''(x)dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$ *.

$$\boxed{d^2 f(x) = f''(x)dx^2}$$

Здесь x – независимая переменная.

---

* Подчеркнем, что здесь используется специальное обозначение для квадрата дифференциала независимой переменной.

Замечание

Форма второго дифференциала не инвариантна.

Аналогично

$$\boxed{d^3 f(x) = f'''(x) dx^3.}$$

Пусть $f(x) = x$, тогда $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; d^2 x = 0$.

$f'''(x) = 0 \;\Rightarrow\; d^3 x = 0$ и так далее.

Вывод

Дифференциалы высших порядков от независимой переменной равны нулю.

2.4. Основные теоремы анализа

Теорема Ролля (о нуле производной)

Если

1. $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$,
2. $\exists f'(x)$ на (a,b),
3. $f(a) = f(b)$,

то $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\boxed{f'(\xi) = 0.}$$

Доказательство

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, она достигает на $[a,b]$ наибольшего M и наименьшего m значений. Возможны два случая.

1. $M = m$.

Тогда $f(x) = M = m \;\Rightarrow\; f(x) - const$.

$f'(x) = 0$.

2. $M > m$.

Тогда хотя бы одно из этих значений достигается внутри $[a,b]$, т.е. в точке $\xi \in (a,b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть $f(\xi) = M$, где $\xi \in (a,b)$. Так как ξ – внутренняя точка, то $\exists f'(\xi)$.

Докажем, что $f'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

$f(\xi) \ge f(\xi + \Delta x) \;\; \forall \Delta x$.

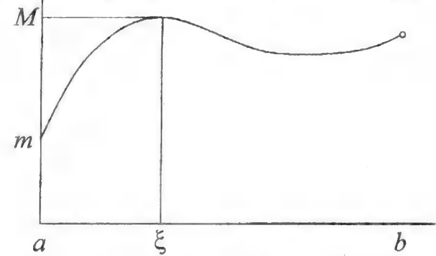
$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'_{прав}(\xi) \le 0, \qquad (2)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'_{лев}(\xi) \ge 0. \qquad (3)$$

Но из существования $f'(\xi)$ следует, что $f'(\xi) = f'_{прав}(\xi) = f'_{лев}(\xi) \Rightarrow f'(\xi) = 0$ с учетом (2) и (3), что и требовалось доказать. Аналогично выполняется доказательство для $f(\xi) = m$. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация

Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a,b]$, то в некоторой точке отрезка ее касательная параллельна оси OX.



Теорема Ролля позволяет узнать об обращении производной в нуль без ее вычисления.

Пример

$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет 3 корня.

Доказательство

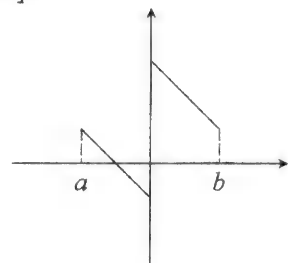
$f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$.

Для каждого из отрезков $[-3,-2]$, $[-2,-1]$, $[-1,0]$ выполняются условия теоремы Ролля, следовательно, есть три точки, по одной на каждом из отрезков, в которых производная обращается в нуль.

Замечание

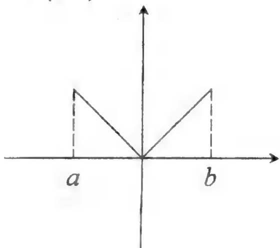
Все условия теоремы Ролля необходимы для справедливости ее утверждения.

1. ***Непрерывность*** на $[a,b]$.

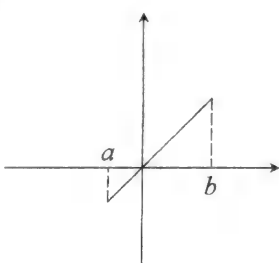


В данном примере нарушено условие 1 теоремы Ролля (непрерывность), что привело к невозможности существования нуля первой производной.

2. ***Дифференцируемость*** на (a,b).



3. ***Равенство*** $f(a)=f(b)$.



Теорема Лагранжа

Если

1. $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$,
2. $\exists f'(x)$ – на (a,b),

то существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a,b)$:

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).}$$

Доказательство

Введем обозначение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$F(x)=f(x)-f(a)-Q(x-a)$.

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1. $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2. $\exists F'(x)$ на (a,b);
3. $F(a)=F(b)=0$.

Следовательно, $\exists c:\ c\in(a,b),\ F'(c)=0$.

Далее $F'(x)=f'(x)-Q$,

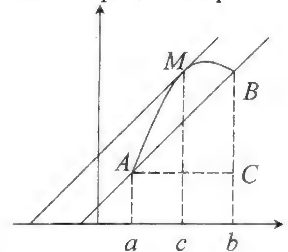
$F'(c)=f'(c)-Q=0$,

$f'(c) = Q$,

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Рассмотрим графическую иллюстрацию теоремы.



$\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – угловой коэффициент секущей AB.

$f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = c$.

На дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB, следовательно, теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Доказанная формула называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***.

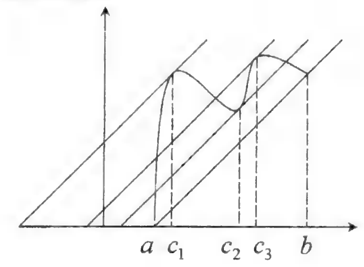
Так как $a < c < b$, то $c - a < b - a$.

$c - a = \theta(b - a)$, где $0 < \theta < 1 \Rightarrow c = a + \theta(b - a)$.

$\boxed{f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)] \cdot (b - a)}$ – другая редакция формулы Лагранжа.

Замечание 3

Точек c может быть несколько.



Замечание 4

Если $f(a)=f(b)$, то $f'(c)=0$ – утверждение теоремы Ролля.

Замечание 5

Теорему Лагранжа можно использовать для приближенных вычислений.

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\ 0<\theta<1.$$

Положим $\theta=\dfrac{1}{2}$, тогда

$$f(b)-f(a)\approx f'\left[\frac{a+b}{2}\right](b-a).$$

Погрешность тем меньше, чем ближе b к a.

Пример

$b=1{,}1$, $a=1{,}0$, $\operatorname{arctg}1{,}1$ – ?

$$\operatorname{arctg}1{,}1\approx\operatorname{arctg}1+0{,}1\cdot(\operatorname{arctg}x)'\Big|_{x=c},$$

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2},\ c=\frac{(1{,}0+1{,}1)}{2},$$

$$\frac{1}{1+x^2}\Bigg|_{c=\frac{2,1}{2}}\approx\frac{1}{2{,}1}\approx 0{,}5,$$

$$\operatorname{arctg}1{,}1\approx\frac{\pi}{4}+0{,}05.$$

Теорема Коши

Если

1. $f(x)$, $\varphi(x)$ – непрерывны на $[a,b]$,
2. $\exists f'(x)$, $\varphi'(x)$ на (a,b),
3. $\varphi'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$,

то $\exists c\in(a,b)$:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}}.$$

Доказательство

1. $\varphi(b)\neq\varphi(a)$, так как иначе по теореме Ролля $\varphi'(x)$ обращалась бы в нуль, по крайней мере, в одной точке $c\in(a,b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)].$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$

$\exists c\in(a,b)$ такая, что $F'(c)=0\ \Rightarrow$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot\varphi'(c).$$

Разделим равенство на $\varphi'(c)$ с учетом того, что $\varphi'(c)\neq 0$:

$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, что и требовалось доказать.

Замечание

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Правило Лопиталя

Рассмотрим $F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a.

Если при $x\to a$ функция $f(x)\to 0$ (∞) и $\varphi(x)\to 0$ (∞), таким образом, при $x\to a$ имеет место неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$\lim\limits_{x\to a}F(x)$ – ?

Теорема

Если

1. $f(x)$, $\varphi(x)$ – непрерывны на $[a,b]$,
2. $\exists f'(x)$, $\varphi'(x)$ на (a,b) ($\varphi'(x)\neq 0$),
3. $f(a)=\varphi(a)=0$,

то

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}.$$

Доказательство

Возьмем на $[a,b]$ точку x. На отрезке $[a,x]$ по теореме Коши можно записать:

$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, $a<c<x$.

Однако $f(a)=\varphi(a)=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

При $x\to a$ и $c\to a$.

Пусть $\exists\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=A$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$, что и требовалось доказать.

Правило Лопиталя

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание 1

Если $x\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$, $f(x)\to 0$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 2

Если $f'(a)=\varphi'(a)=0$ и $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то, применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Вывод

Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Замечание 3

Предел отношения двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Применение правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей

1. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1}=2$;

б) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}=\infty$.

2. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a}{1}=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}=0$.

3. Неопределенность $[0\cdot\infty]$ сводится к $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пусть $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$.

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ или}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Пример

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2}=0.$$

4. Неопределенность $[\infty-\infty]\Rightarrow\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\operatorname{tg}x-\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x\left(1-\frac{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}\right),$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\cos^2 x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}2\cos x(-\sin x)=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\operatorname{tg}x-\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\infty.$$

5. Неопределенность $\left[0^0\right]$ сводится к $[0\cdot\infty]$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}$ – ?

$y=f(x)^{\varphi(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}y$ – ?

Используем прием предварительного логарифмирования:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

$\lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln y} =$ ↕в силу непрерывности элементарной функции e^x ↕$=$

$= e^{\lim\limits_{x\to a} \ln y}$,

$\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \ln f(x) = [0 \cdot \infty].$

Пример

$y = x^x$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y$ – ?

Решение

$\ln y = x \ln x$,

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+0} y = e^0 = 1.$$

6. Неопределенность $[\infty^0] \Rightarrow [0 \cdot \infty]$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}$ – ?

$y = f(x)^{\varphi(x)}$.

$\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) \ln f(x) = [0 \cdot \infty].$

Пример

$y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$, $\lim\limits_{x\to 0} y$ – ?

Решение

$\ln y = \dfrac{1}{\ln x} \ln \operatorname{ctg} x$,

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\cos x \sin x} = -1.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^{-1}.$$

7. Неопределенность $[1^\infty] \Rightarrow [0 \cdot \infty]$.

Пример

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} - ?$$

Решение

$$y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

$$\ln y = \frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x},$$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1\right)}{\frac{x^2}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\frac{x^3}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{3}{2} x^2} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{3}}.$$

Лекция 3. Формула Тейлора

Содержание

1. Теорема Тейлора.
2. Оценка остаточного члена.
3. Разложение по формуле Маклорена некоторых функций.
4. Приложения формул Тейлора и Маклорена.

3.1. Теорема Тейлора

Теорема (опубликована в 1715 г.)

Если $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производные до $(n+1)$-го порядка включительно,

то для любого x из указанной окрестности ***справедлива формула Тейлора n-го порядка***.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x,a), \quad (1)$$

где

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ c\in(x,a). \quad (2)$$

Доказательство

Обозначим

$$P_n(x,a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n -$$

– многочлен n-го порядка. Тогда формула Тейлора может быть записана в виде суммы многочлена Тейлора и ***остатка (остаточного члена)***:

$$f(x)=P_n(x,a)+R_n(x,a).$$

Отсюда

$$P_n(x,a)=f(x)-R_n(x,a).$$

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости формулы (2).

Зафиксируем x из указанной окрестности точки a. Пусть $x>a$.

На отрезке $[a,x]$ рассмотрим вспомогательную функцию переменной t

$$\Phi(t)=f(x)-P_n(x,t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

Функция $\Phi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому на отрезке существует промежуточная точка с, такая что

$$\boxed{\Phi'(c)=0.}$$

Вычислим $\Phi'(t)$

$$\Phi'(t)=-P_n'(x,t)-\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

Отдельно вычислим производную по t от многочлена Тейлора (зависимость от t содержится в двучлене $(x-t)$ и в коэффициентах $f^{(k)}(t)$).

$$P_n'(x,t)=f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Таким образом,

$$\Phi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}R_n(x,a).$$

При $t=c$ получаем

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание

Формула (2) дает остаточный член в *форме Лагранжа*. Известны и другие формы остаточного члена, например *форма Пеано*

$$R_n(x,a)=o\left(|x-a|^n\right),$$

в соответствии с которой остаток формулы Тейлора n-го порядка является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $|x-a|^n$.

Так как $c\in(x,a)$, то точку c можно представить в виде $c=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1$.

Частные случаи формулы Тейлора

1°. $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ – ***многочлен порядка n***.

Так как $\forall x\ \ f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, то $f^{(n+1)}(c)\equiv 0\ \Rightarrow\ R_n(x,a)=0\ \Rightarrow$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

По формуле Тейлора ***любой многочлен*** порядка n можно представить в виде ***многочлена по степеням*** $(x-a)$.

2°. ***Формула Маклорена*** ($a=0$).

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\qquad (3)$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1\ –$$

– остаточный член в форме Лагранжа.

3.2. Оценка остаточного члена

Пусть $f(x)$ такова, что $\forall n$ и $\forall x$ из окрестности точки a справедливо неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Рассмотрим $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

$$|R_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как $\forall |x-a|$ $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$ (см. теорию рядов), то остаточный член может быть сделан сколь угодно малым путем увеличения n, если функция $f(x)$ обладает указанным выше свойством. Поэтому формулу Тейлора можно использовать для приближенных вычислений с любой наперед заданной степенью точности.

3.3. Разложение по формуле Маклорена некоторых функций

Итак, $a = 0$.

1°. $\boxed{f(x) = e^x}$, $f(0) = 1$;

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$;

$f''(x) = e^x$, $f''(0) = 1$;

...

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$.

По формуле Маклорена

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).}$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как $\forall n$ на интервале $(-r, r)$ имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| < e^r$, возможна оценка остатка

$$\boxed{\left|R_n(x)\right| < \frac{e^{\theta r}}{(n+1)!} r^{n+1}.}$$

2°. $\boxed{f(x) = \sin x}$, $f(0) = 0$;

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \ n - \textit{четное}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \ n - \textit{нечетное}. \end{cases}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + R_n(x)}$$

Нечетная функция $\sin x$ разложена в многочлен с нечетными степенями.

3°. $\boxed{f(x) = \cos x}$, $f(0) = 1$;

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, \ n - \textit{нечетное}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \ n - \textit{четное}. \end{cases}$$

4°. $\boxed{f(x)=\ln(1+x)}$, $f(0)=0$;

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0)=(-1)^{(n-1)}(n-1)!.$$

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+R_n(x)}$$

5°. $\boxed{f(x)=(1+x)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$;

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)}$$

Частный случай: $\boxed{\alpha=n}$.

$$\boxed{(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n}\ -$$

– формула ***бинома Ньютона***.

3.4. Приложения формул Тейлора и Маклорена

а) *Для приближенных вычислений значений функций*

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

При этом $|R_n(x)|$ – абсолютная погрешность приближенного равенства.

Нужно уметь оценивать абсолютную погрешность, т.е. получать неравенство

$$|R_n(x)|\le\varepsilon,$$

где ε – степень точности приближенного равенства.

Пример

Вычислить значение e с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$. Воспользуемся формулой Маклорена порядка n, положив $x=1$:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1),$$

$$R_n(1)=\frac{e^\theta}{(n+1)!},\ 0<\theta<1\ \Rightarrow\ |R_n(1)|<\frac{e}{(n+1)!},$$

так как $e<3$, то $\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\ \Rightarrow\ |R_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}$.

$$R_n(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ 0<\theta<1\ \Rightarrow\ |R_n(1)|<\frac{e}{(n+1)!},$$

так как $e<3$, то $\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\ \Rightarrow\ |R_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}$.

Найдем наименьшее n, удовлетворяющее условию $\frac{3}{(n+1)!}\le\varepsilon$.

При $\varepsilon=0{,}001$, $n=6\ \Rightarrow$

$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{6!}=\frac{1957}{720}\approx 2{,}718$.

б) *Для аппроксимации функции многочленом*

$$f(x)\approx P_n(x,a).$$

Частный случай: $\boxed{n=1}$.

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

(справа линейная функция).

Такая замена называется ***линеаризацией функции***.

Геометрический смысл линеаризации

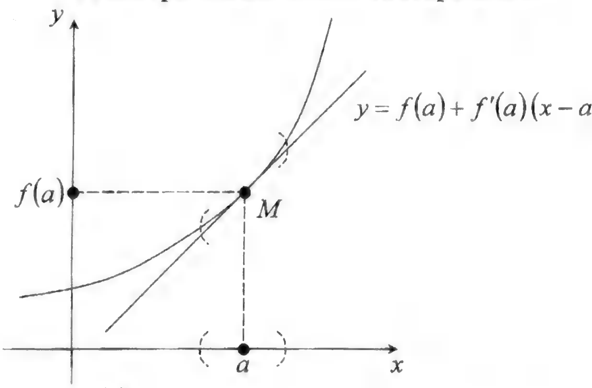


График функции $f(x)$ в окрестности точки a заменяется отрезком касательной к графику функции в этой точке.

в) *Для вычисления пределов.*

Пример

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ – ?

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right\}-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots}{x^3}=-\frac{1}{3!}.$$

Этот пример является яркой иллюстрацией ограниченности использования возможности замены бесконечно малых функций на эквивалентные под знаком предела (только множители!).

Лекция 4. Исследование функций с помощью производной

Содержание

1. Условие монотонности функций.
2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
3. Первый достаточный признак экстремума.
4. Общая схема отыскания экстремума.
5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

Условие монотонности функций.

4.1. Условие монотонности функций

Определение

Функция $f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на (a,b), если $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, таких, что для $x_1<x_2$ справедливо неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ ($f(x_1)\ge f(x_2)$).

Теорема

Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ на этом интервале была неотрицательной (неположительной).

Доказательство

Необходимость

Условие: $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

Утверждение: $f'(x)\ge0$.

Доказательство

Зафиксируем любые $x_1<x_2$ из $[a,b]$. По формуле Лагранжа

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, $c\in(x_1,x_2)$.

По условию $f(x_2)\ge f(x_1)$, т.е. $f(x_2)-f(x_1)\ge0$, $(x_2-x_1)>0$.

Следовательно, из формулы Лагранжа $\boxed{f'(c)\ge0}$.

Достаточность

Условие: $f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$.

Утверждение: $f(x)$ не убывает.

Доказательство

Зафиксируем любые $x_1 < x_2$ из (a,b).

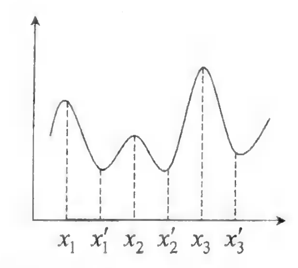
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

По условию $f'(c) \geq 0$, $(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x_2) \geq f(x_1)}$.

4.2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

Определение

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 ***локальный максимум*** (***минимум***), если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ ($f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$) для любых $x_1 + \Delta x$ ($\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$) из достаточно малой окрестности точки x_1.



x_1, x_2, x_3 – точки локального максимума.

x_1', x_2', x_3' – точки локального минимума.

Локальный максимум и минимум объединим общим названием ***локальный экстремум***.

Замечание 1

Экстремум достигается только во внутренних точках $[a,b]$.

Замечание 2

Максимумы и минимумы не обязательно являются наибольшими и наименьшими значениями $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если

1. $f(x)$ – дифференцируема,
2. x_1 – точка экстремума,

то

$$\boxed{f'(x_1) = 0}.$$

Доказательство

Пусть для определенности x_1 – точка максимума. Тогда

$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$ для любого достаточного малого Δx.

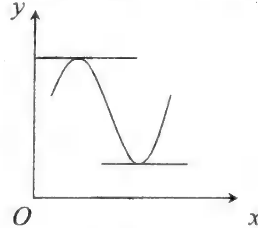
$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0$, если $\Delta x>0$.

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0$, если $\Delta x<0$.

$f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$.

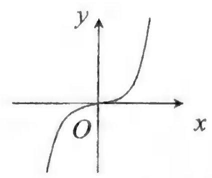
$\left.\begin{matrix} f'(x_1)\le 0 \\ f'(x_1)\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{f'(x_1)=0}$, так как $f'(x_1)$ не зависит от способа стремления $\Delta x\to 0$.

Геометрический смысл необходимого условия экстремума



Если в точке локального экстремума существует касательная к графику функции, то она параллельна оси Ox .

Пример



Пример иллюстрирует необходимый, но недостаточный характер условия.

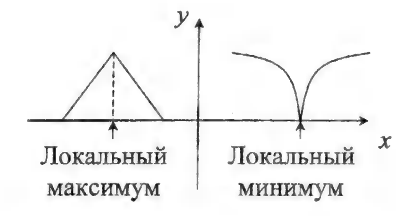
$f(x)=x^3$, $f'(0)=0$, но $x_1=0$ не является точкой экстремума.

Следствие 1

Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она ***может иметь*** экстремумы только в тех точках, где $f'(x_1)=0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует.



4.3. Первый достаточный признак экстремума

Теорема 1 (для дифференцируемой функции)

Если

1. точка c является точкой возможного экстремума $f(x)$,
2. $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c,

то

1. если $f'(x) > 0 (< 0)$ (< 0) для $x < c$ и $f'(x) < 0$ (> 0) для $x > c$, где c – точка локального максимума (минимума),
2. если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от x, то экстремума в точке c нет.

Доказательство

1. Пусть $f'(x) > 0$, $x < c$; $f'(x) < 0$, $x > c$.

$x_0 < c$,

$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$ по теореме Лагранжа, где $\xi \in (x_0, c)$.

$f'(\xi) > 0$, $(c - x_0) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) > f(x_0)}$ $\forall x_0 < c$.

$x_0 > c$,

$f(x_0) - f(c) = f'(\xi)(x_0 - c)$.

$f'(\xi) < 0$, $(x_0 - c) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) > f(x_0)}$ $\forall x_0 > c$.

Следовательно, c – точка максимума.

2. Пусть $f'(x) > 0$ $\forall x$ из окрестности c.

$x_0 < c$:

$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$.

$$\boxed{f(c) > f(x_0)}$$

$x_0 > c$:

$f(x_0) - f(c) = f'(\xi)(x_0 - c)$.

$$\boxed{f(x_0) > f(c)}$$

c не является точкой экстремума, что и требовалось доказать.

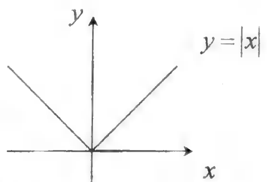
Теорема 1 (для функции, недифференцируемой в точке возможного экстремума)*

Если $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, за исключением самой точки c, и непрерывна в этой точке,

то справедливо утверждение теоремы 1.

(Без доказательства).

Пример



В точке $x=0$ $f(x)$ не дифференцируема, но непрерывна.

$f'(x<0)<0$, $f'(x>0)>0$.

$x=0$ – точка локального минимума.

4.4. Общая схема отыскания экстремума

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и дифференцируема на этом интервале за исключением конечного числа точек.

1. Ищем *точки возможного экстремума* (критические):
   а) точки, где $f'(x)=0$;
   б) точки, где не существует $f'(x)$.

Располагаем их в порядке возрастания: $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$.

2. Определяем *знак* $f'(x)$ в областях (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b).
3. Вычисляем (в случае необходимости) $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$.
4. Определяем *тип экстремума* по *теореме 1* или *теореме 1**.

Пример

$f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

1. $f'(x)=2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x$.

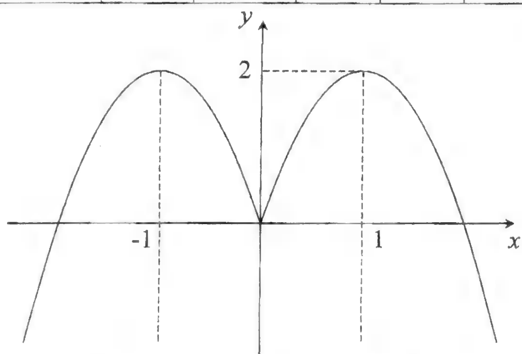
а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-2x=0$;

$$\boxed{x_1=-1},\ \boxed{x_2=1}.$$

б) $f'(x)$ не существует в точке $x_3=0$.

$$\boxed{x_3=0}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗	2	↘
$f'(x)$	+	0	-	нет	+	0	-
		Макс.		Мин.		Макс.	



Пункты 2-4 отражены в таблице, результат проиллюстрирован графически.

4.5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков. Условие монотонности функций

Теорема 2 (второй достаточный признак экстремума)

Если $f(x)$ имеет в критической точке c конечную вторую производную $f''(x)$,

то

если $f''(c)>0$, то c – точка локального минимума,

если $f''(c)<0$, то c – точка локального максимума.

Доказательство

$$f''(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(c+\Delta x)-f'(c)}{\Delta x}.$$

Пусть $f''(c)>0$.

Так как c критическая точка, $f'(c)=0$.

Тогда, если $\Delta x<0$, то $f'(c+\Delta x)<0$,

если $\Delta x>0$, то $f'(c+\Delta x)>0$.

Таким образом, первая производная меняет знак с «-» на «+» при переходе через точку c. Следовательно, c – точка локального минимума.

Второе утверждение ($f''(c)<0$) доказывается аналогично.

Теорема 3 (третий достаточный признак экстремума)

Если

1. $f(x)$ имеет в критической точке c конечную производную порядка $2n$: $f^{(2n)}(c)$,
2. $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(2n-1)}(c) = 0$,

то

если $f^{(2n)}(c) > 0$, c – точка локального минимума,

если $f^{(2n)}(c) < 0$, c – точка локального максимума.

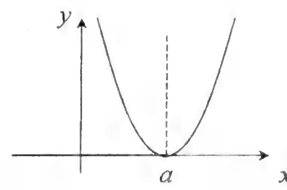
(Без доказательства).

Пример

$f(x) = (x-a)^6$.

1) $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(5)}(a) = 0$;

2) $f^{(6)}(a) = 6! > 0$.



Таким образом, a – точка локального минимума.

Лекция 5. Исследование функций с помощью производной (продолжение)

Содержание

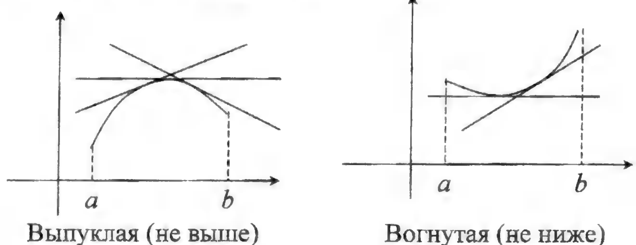
1. Точки перегиба.
2. Общая схема отыскания перегиба.
3. Асимптоты кривых.
4. Общая схема построения графика функции.
5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений на отрезке.

5.1. Точки перегиба

Определение

Говорят, что кривая обращена ***выпуклостью вверх*** (***вниз***) на (a,b), если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой касательной на (a,b).

Такие кривые называются ***выпуклыми*** (***вогнутыми***).



Выпуклая (не выше) Вогнутая (не ниже)

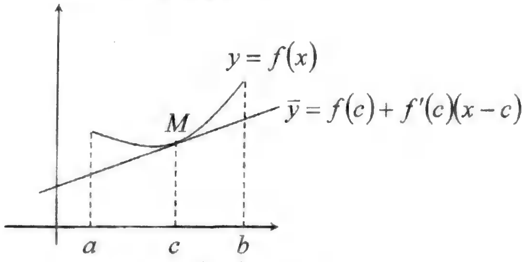
Теорема (достаточное условие выпуклости)

Если во всех точках (a,b) $f''(x)\le 0$ ($f''(x)\ge 0$),

то график $y=f(x)$ на (a,b) является выпуклым (вогнутым).

Доказательство

Пусть для определенности $f''(x)\ge 0$.



Фиксируем любую точку c на (a,b).

Уравнение касательной к кривой в точке $M(c,f(c))$:

$$\bar{y}=f(c)+f'(c)(x-c).$$

Рассмотрим

$$y-\bar{y}=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c).$$

Используя формулу Тейлора

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

получаем

$$y-\bar{y}=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,$$

где ξ – внутренняя точка (c,x).

По условию $f''(\xi)\ge 0 \Rightarrow \boxed{y-\bar{y}\ge 0}$.

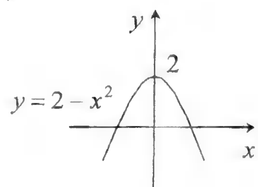
Таким образом, из условия $f''(x)\ge 0$ следует вогнутость графика.

Аналогично, из условия $f''(x)\le 0$ следует выпуклость графика.

Пример 1

$y = 2 - x^2$,

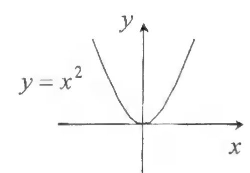
$y'' = -2$ (график выпуклый).



Пример 2

$y = x^2$,

$y'' = 2$ (график вогнутый).



Определение

Точка $M(c, f(c))$ графика $y = f(x)$ называется ***точкой перегиба*** графика, если существует такая окрестность точки c оси абсцисс, в пределах которой график $y = f(x)$ слева и справа от c имеет различное направление выпуклости.

Теорема (необходимое условие перегиба)

Если

1. существует $f''(x)$ на (a,b),
2. c – точка перегиба, $c \in (a,b)$,

то $f''(c) = 0$.

(Без доказательства).

Следствие 1

Если $f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b), то перегиб возможен только в тех точках, где $f''(x) = 0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь перегиб в тех точках, где $f''(x)$ не существует.

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если

1. c – точка возможного перегиба $f(x)$,
2. $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c за исключением, быть может, самой точки c,

то

1. если $f''(x)$ меняет знак при переходе через c, то в точке c – перегиб,
2. если $f''(x)$ не меняет знак, то перегиба нет.

Доказательство

Пусть $f''(x) \geq 0$, $x < c$ (слева); $f''(x) \leq 0$, $x > c$ (справа).

Тогда по теореме о достаточном условии выпуклости слева от точки c – вогнутая кривая, справа – выпуклая кривая, в точке c – перегиб.

5.2. Общая схема отыскания перегиба

1. Поиск *точек возможного перегиба*:
   а) точки, где $f''(x) = 0$;
   б) точки, где $f''(x)$ не существует ($a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$).
2. Определение *знака* $f''(x)$ в областях (a, x_1), (x_1, x_2), …, (x_n, b).
3. Установление *наличия перегиба* (достаточное условие перегиба).

5.3. Асимптоты кривых

Определение 1

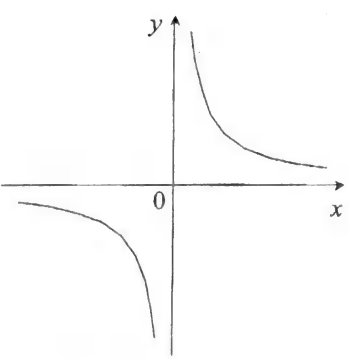
Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.

Замечание

Если $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв второго рода, то $x = x_0$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Пример

$y = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.



$\boxed{x=0}$ – вертикальная асимптота.

Определение 2

Прямая $y = k_+ x + b_+$ является ***наклонной асимптотой*** графика $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция представима в виде $f(x) = k_+ x + b_+ + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема

Для того чтобы

график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = k_+ x + b_+$,

необходимо и достаточно

существование односторонних пределов

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_+,}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_+ x\right) = b_+ .}$$

Доказательство

Необходимость

Условие: $\bar{y} = k_+ x + b_+$ – наклонная асимптота функции $y = f(x)$.

Утверждение: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_+ x\right) = b_+$.

Доказательство

По определению наклонной асимптоты $f(x) = k_+ x + b_+ + \alpha(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k_+ x + b_+ + \alpha(x)}{x} = k_+,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_+ x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(b_+ + \alpha(x)\right) = b_+ .$$

Достаточность

Условие: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_+x\right)=b_+$.

Утверждение: $\bar{y}=k_+x+b_+$ – наклонная асимптота $y=f(x)$ при $x\to+\infty$.

Доказательство

Из $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_+x\right)=b_+$ следует $f(x)-k_+x=b_++\alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, т.е. справедливо $f(x)=k_+x+b_++\alpha(x)$, что и требовалось доказать.

Замечание

Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается соответствующая теорема для случая $x\to-\infty$.

Пример

Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Решение

1. $f(x)=\dfrac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ непрерывна в любой точке области определения, границы которой не являются точками разрыва второго рода, т.е. вертикальных асимптот нет.

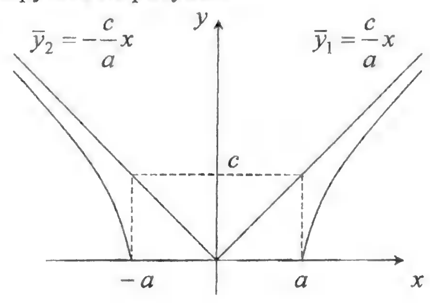
2. Наклонные асимптоты:

а) $k_+=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\dfrac{c}{a}$, $b_+=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{c}{a}x\right)=0$;

б) $k_-=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=-\dfrac{c}{a}$, $b_-=0$.

$\boxed{\bar{y}_1=\dfrac{c}{a}x}$, $\boxed{\bar{y}_2=-\dfrac{c}{a}x}$ – наклонные асимптоты.

Результат иллюстрируется на рисунке.



5.4. Общая схема построения графика функции

Рассмотрим $y = f(x)$. Исследование функции состоит из трех этапов.

I. Информация об особенностях $f(x)$ без производных.

1) Область определения $f(x)$.
2) Четность $(f(x) = f(-x))$, нечетность $(f(x) = -f(-x))$, периодичность ($f(x) = f(x+T)$, T – период для любого x). Сужение области изменения x для дальнейшего исследования.
3) Асимптоты:
   а) вертикальные – $\boxed{x = a}$, где a – точка разрыва второго рода;

   б) наклонные – $\boxed{\bar{y} = kx + b}$.
4) Точки пересечения с осями.

II. Информация из вида $f'(x)$ (схема исследования на экстремум).

III. Информация из вида $f''(x)$ (схема исследования на перегиб).

Результаты этапов I, II, III заносятся в таблицу, с ее помощью строится график: вначале проводятся асимптоты, ставятся опорные точки, найденные в I, II, III, затем проводится линия.

Пример

$y = xe^{-4x}$.

I. $f(x)$:

1) $x \in (-\infty, +\infty)$;
2) функция общего вида;
3) асимптоты:
   а) $f(x) = xe^{-4x}$ непрерывна всюду, нет вертикальных асимптот;

   б) $k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{4x}} = 0$, $b_+ = 0$ $(k_- = +\infty)$,

   $\boxed{\bar{y} = 0}$ – наклонная (горизонтальная) асимптота при $x \to +\infty$;
4) $\boxed{x_1 = 0}$, $\boxed{y_1 = 0}$ – точка пересечения с осями.

II. $f'(x)$: $y' = e^{-4x} - 4xe^{-4x} = e^{-4x}(1 - 4x)$:

1) $y' = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{1}{4}}$;
2) отсутствуют точки, для которых производная не существует.

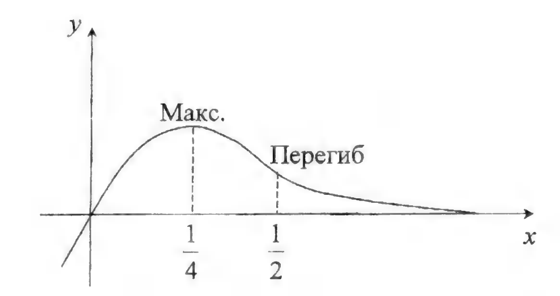
III. $f''(x)$: $y'' = -4e^{-4x}(1 - 4x) - 4e^{-4x} = e^{-4x}(16x - 8)$:

1) $y'' = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = \dfrac{1}{2}}$;
2) отсутствуют точки, для которых вторая производная не существует.

I, II, III $\Rightarrow\ -\infty < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < +\infty$.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y	-	0	+	$\frac{1}{4e}$	+	$\frac{1}{2e^2}$	+
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	-	-	0	+
	↗⌒	⌒	↗⌒	Макс.	↘⌒	Перегиб	↘◡

График.



5.5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений на отрезке

Рассмотрим $f(x)$, непрерывную на $[a,b]$. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a,b]$ своих $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.

$\sup f(x)$ – *наибольшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

$\inf f(x)$ – *наименьшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

Для определения значений $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ следует найти:

1) значения $f(x)$ в точках возможного экстремума;
2) значения $f(x)$ на концах интервала $[a,b]$.

Из результатов 1) и 2) выбираются $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.

II. Векторные и комплексные функции действительной переменной

Лекция 6. Векторные функции скалярного аргумента

Содержание

1. Векторная функция скалярного аргумента.
2. Предел и непрерывность вектор-функции в точке.
3. Производная вектор-функции.

6.1. Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Если каждому значению $t \in D$ (множество чисел) поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t) \in R^3$, то говорят, что на множестве D задана ***вектор-функция*** $\vec{r}(t)$.

Под $\vec{r}(t)$ можно понимать свободные векторы или радиус-векторы с закрепленным началом.

Задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координат вектора $\vec{r}(t)$.

Обозначения вектор-функции:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \tag{1}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \tag{2}$$

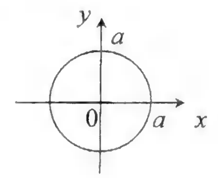
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{3}$$

(1) и (2) – векторные формы записи $\vec{r}(t)$,
(3) – координатная форма записи.
Если t пробегает все значения из D, конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает линию, называемую ***годографом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$ (начало $\vec{r}(t)$ закреплено).
Другими словами: годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$ – геометрическое место концов $\vec{r}(t)$, т.е. точек $M(x(t), y(t), z(t))$, траектория точки M.

Пример
$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j}$.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Годографом является окружность



Рассмотрим координатную форму $\vec{r}(t)$. Уравнения (3) – параметрические уравнения линии в R^3.

Таким образом, любую линию в пространстве, заданную параметрическими уравнениями (3), можно интерпретировать как годограф вектор-функции и наоборот.

Частным случаем (3) являются

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} - \qquad (3^*)$$

– параметрические уравнения линии в R^2, т.е. на плоскости.

(3*) задает годограф двумерной вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Если в уравнении (3*) исключить параметр t, то (3*) преобразуется в обычное уравнение кривой на плоскости вида $f(x, y) = 0$.

Пример 1

Окружность – годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases} \text{ – параметрические уравнения.}$$

Почленное возведение в квадрат с последующим почленным сложением

$$\begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t, \\ y^2 = a^2\sin^2 t, \end{cases}$$

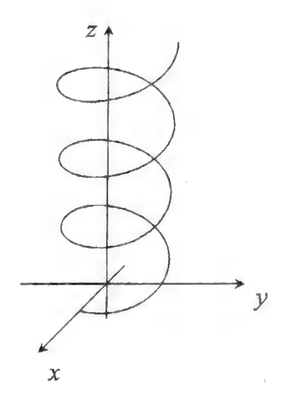
приводит к уравнению, где параметр t исключен.

$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$ – каноническое уравнение окружности.

Пример 2

Винтовая линия – годограф радиус-вектора точки, движущейся по окружности в плоскости, параллельной OXY, и вдоль оси OZ с постоянной скоростью.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$



Пример 3

Циклоида – траектория точки окружности, которая без скольжения катится вдоль оси OX. Закон движения описывается системой

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

6.2. Предел и непрерывность вектор-функции в точке

Пусть $\vec{r}(t)$ определена в некоторой окрестности t_0 за исключением, быть может, самой t_0.

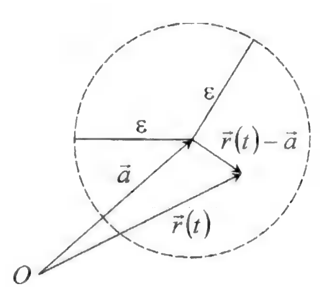
Определение

Вектор $\vec{a}$ называется ***пределом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $|t - t_0| < \delta$ следует, что $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$.

Обозначение предела вектор-функции

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}}.$$

Геометрический смысл:



Лемма

$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\lim_{t\to t_0}|\vec{r}(t)-\vec{a}|=0$ (см. чертеж).

Теорема 1

Для того чтобы

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a},$$

необходимо и достаточно

выполнение равенств

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}x(t)=a_x,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_y,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_z},$$

где $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$.

Доказательство

Необходимость

Условие: $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$.

Утверждение: $\lim_{t\to t_0}x(t)=a_x$, $\lim_{t\to t_0}y(t)=a_y$, $\lim_{t\to t_0}z(t)=a_z$.

Доказательство

Рассмотрим $|\vec{r}(t)-\vec{a}|=\sqrt{(x(t)-a_x)^2+(y(t)-a_y)^2+(z(t)-a_z)^2}\geq|x(t)-a_x|$.

По лемме $|\vec{r}(t)-\vec{a}|\to 0$ при $t\to t_0$.

Следовательно, $(x(t)-a)\to 0$, т.е. $\boxed{\lim_{t\to t_0}x(t)=a_x}$.

Аналогично доказываются утверждения для $y(t)$ и $z(t)$.

Достаточность
Доказательство
По условию $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a_x$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=a_y$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=a_z$.
Следовательно, $(x(t)-a_x)\to 0$, $(y(t)-a_y)\to 0$, $(z(t)-a_z)\to 0$ при $t\to t_0$.
Значит, и $\sqrt{(x(t)-a_x)^2+(y(t)-a_y)^2+(z(t)-a_z)^2}\to 0$, а по лемме $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a}$,
что и требовалось доказать.

Следствие

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\left(\lim_{t\to t_0}x(t),\lim_{t\to t_0}y(t),\lim_{t\to t_0}z(t)\right)}$$

Свойства пределов вектор-функций

1^0. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec r_1(t)+\vec r_2(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_2(t)$.

2^0. $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot\vec r(t)=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)$, где $f(t)$ – скалярная функция.

3^0. $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec r_1(t),\vec r_2(t))=\left(\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_2(t)\right)$.

4^0. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec r_1(t)\times\vec r_2(t)]=\left[\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_2(t)\right]$.

Определение
Вектор-функция, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется ***непрерывной*** в точке t_0, если выполняются условия:

1) существует $\vec r(t_0)$,
2) существует $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)$,
3) $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec r(t_0)}$.

Из теоремы 1 следует теорема 1*.

*Теорема 1**
Для того чтобы
вектор-функция $\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ была непрерывна в точке t_0,
необходимо и достаточно, чтобы
при $t\to t_0$ были непрерывны функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

6.3. Производная вектор-функции

Определение

Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$.

Обозначение: $\vec{r}\,'(t_0)$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}}.$$

Из теоремы 1 следует теорема 1**.

*Теорема 1***

Для того чтобы

$\vec{r}(t)$ имела производную в точке t_0,

необходимо и достаточно,

чтобы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные в точке t_0

($\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$).

Следствие

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))}$$

Определение

Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется ***дифференцируемой*** в точке t_0, если существует $\vec{r}\,'(t_0)$.

Легко показать, что приращение вектор-функции, дифференцируемой в точке t_0, в окрестности этой точки представимо в виде

$$\Delta\vec{r} = \vec{a}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot \Delta t,$$

где $\vec{a}$ – вектор, не зависящий от Δt, $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Здесь $\vec{a}\Delta t$ – главная линейная часть приращения $\vec{r}(t)$, называемая ***дифференциалом*** вектор-функции и обозначаемая $d\vec{r}$.

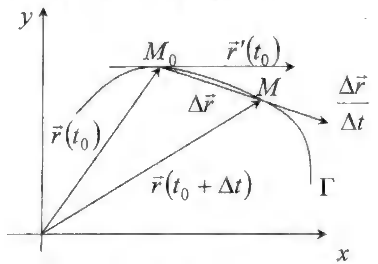
Таким образом, для дифференцируемой функции

$$\boxed{\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot \Delta t.}$$

Очевидно, что если $\vec{r}(t)$ дифференцируема в t_0, то $\vec{r}(t)$ непрерывна в t_0.

Геометрический и механический смысл производной вектор-функции

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, Г – ее годограф.



$M_0(x(t_0),y(t_0))$, $M(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t))$ – точки годографа.

При $t\to t_0$ $M\to M_0$, $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\to\vec{r}'(t_0)$.

Геометрический смысл

Из чертежа понятно, что $\vec{r}'(t_0)$ направлен по касательной к графику в точке M_0 в сторону возрастания параметра t.

Механический смысл

Если t – время, то $\vec{r}'(t_0)$ – вектор скорости точки, движущейся по годографу в момент t_0.

Пример

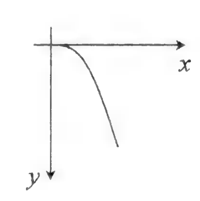
Найти скорость тела, движущегося по закону

$$\begin{cases} x=V_0t, \\ y=\dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{S}(t)=\left(V_0t,\frac{gt^2}{2}\right),\ \vec{V}(t)=\vec{S}'(t)=(V_0,gt).$$

Траектория тела – годограф $\vec{S}(t)$, после исключения параметра описывается уравнением

$$t=\frac{x}{V_0}\Rightarrow$$

$$\boxed{y=\frac{g}{2V_0^2}x^2}$$ – парабола.



Свойства операции дифференцирования

1^0. $\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right)' = \vec{a}' \pm \vec{b}'$.
2^0. $(\alpha\vec{a})' = \alpha\vec{a}'$, α – *const*.
3^0. $\vec{a}' = 0$, $\vec{a}$ – *const*.
4^0. $(\varphi(t)\vec{a}(t))' = \varphi'(t)\vec{a}(t) + \varphi(t)\vec{a}'(t)$.
5^0. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)' = \left(\vec{a}',\vec{b}\right) + \left(\vec{a},\vec{b}'\right)$.
6^0. $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]' = \left[\vec{a}' \times \vec{b}\right] + \left[\vec{a} \times \vec{b}'\right]$.
7^0. $\vec{a}'(\varphi(t)) = \vec{a}'_{\varphi} \cdot \varphi'(t)$.

Лекция 7. Комплексные числа

Содержание

1. Определения.
2. Алгебраическая форма комплексного числа.
3. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Сопряженные комплексные числа.
5. Изображение комплексных чисел на плоскости.
6. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

7.1. Определения

Определение 1

Комплексными числами называются любые упорядоченные пары $z = (x, y)$ действительных чисел, для которых определены операции сложения и умножения:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 2

Действительные числа x и y называются ***действительной*** и ***мнимой частями*** комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 3

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются ***равными***, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Определение 4

Комплексным нулем называется число $z=(x,y)$, где $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z=0$ ($x=y=0$).

Определение 5

Число $z=(x,0)$ называется ***чисто действительным*** и обозначается $(x,0)=x$.

Множество действительных чисел содержится в множестве комплексных чисел.

Определение 6

Число $z=(0,y)$ называется ***чисто мнимым***.

Определение 7

Число $z=(0,1)$ называется ***мнимой единицей*** и обозначается символом i, то есть $\boxed{i=(0,1)}$.

7.2. Алгебраическая форма комплексного числа

Вычислим

а) $i\cdot i=i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

$$\boxed{i^2=-1}$$

б) $i(y,0)=(0,1)(y,0)=(0,y)$.

$$\boxed{(0,y)=iy}$$

в)

$$\begin{array}{r} (x,0)=x \\ +\ (0,y)=iy \\ \hline (x,0)+(0,y)=x+iy \end{array}$$

По определению 1 $(x,0)+(0,y)=(x,y)$, следовательно,

$$\boxed{(x,y)=x+iy}\ - \qquad (A)$$

– *алгебраическая форма* комплексного числа.

7.3. Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Рассмотрим $z_1=(x_1,y_1)=x_1+iy_1$, $z_2=(x_2,y_2)=x_2+iy_2$.

I. Сложение

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Таким образом,

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).}$$

С другой стороны, складывая в алгебраической форме почленно, получаем то же самое

$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

II. Умножение

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1x_2 + x_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

С другой стороны, перемножая почленно, получаем

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_2y_1 + ix_1y_2 + i^2 y_1y_2 =$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ – то же самое.

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$$

III. Вычитание (операция, обратная сложению)

Определение

Число z называется ***разностью*** чисел z_1 и z_2 и обозначается $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

IV. Деление (операция, обратная умножению)

Определение

Число $z = (x, y)$ называется ***частным*** от деления z_1 на z_2 ($z_2 \neq 0$) и обозначается $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z \cdot z_2 = z_1$.

$z \cdot z_2 = (xx_2 - yy_2, xy_2 + yx_2)$,

$z_1 = x_1 + iy_1$, $\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$

Получена система из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, для которой

$\Delta = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix}}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}}{x_2^2 + y_2^2} \text{ (формулы Крамера).}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

7.4. Сопряженные комплексные числа

Определение

Число $z^* = (x, -y)$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $z = (x, y)$.

В алгебраической форме $z = x + iy$, $z^* = x - iy$.

Вычислим

а) $z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x$.

$$\boxed{z + z^* = 2x.}$$

$$\boxed{z - z^* = 2iy.}$$

б) $z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

$$\boxed{z \cdot z^* = x^2 + y^2.}$$

Вернемся к операции IV:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Вывод

Пользуясь алгебраической формой комплексного числа, можно производить операции сложения, умножения, вычитания по обычным правилам умножения многочленов. При делении комплексного числа можно использовать прием домножения делимого и делителя (числителя и знаменателя) на число, сопряженное делителю (знаменателю).

Свойства операций сложения и умножения

1^0. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2^0. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3^0. $z_1\, z_2 = z_2\, z_1$.

4^0. $(z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$.

5^0. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

Задание

$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+2i$.

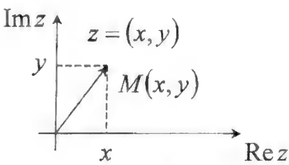
Выполнить действия I-IV.

7.5. Изображение комплексных чисел на плоскости

Рассмотрим комплексное число $z=(x,y)$.

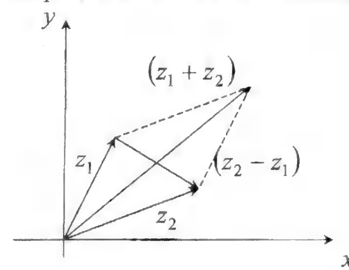
Так как комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z=(x,y)$ точкой плоскости M с координатами (x,y).

Такую плоскость называют ***комплексной***, ось абсцисс – ***действительной***, ось ординат – ***мнимой***.



При этом, очевидно, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел $z=(x,y)$ и множеством точек $M(x,y)$ комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел и множеством радиус-векторов с координатами (x,y).

С учетом последнего операции I и II можно выполнить в векторной форме:

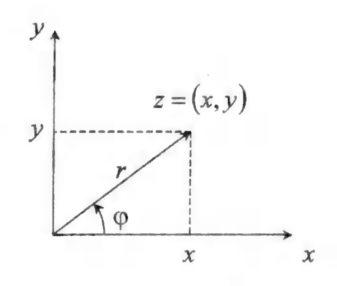


Замечание

Множество комплексных чисел не поддается упорядочению.

7.6. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Введем на плоскости OXY полярные координаты (r,φ)



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}}$$

(A) $\Rightarrow$ (T):

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - \qquad \text{(T)}$$

– ***тригонометрическая форма*** комплексного числа.

Число r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r.$$

Угол φ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$:

$$Argz = \varphi.$$

Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ – многозначная функция, так как одному z соответствует множество значений φ, отличающихся друг от друга на $2k\pi$.

Удобнее работать с ***приведенным аргументом***

$$y = \arg z \ \left(0 \le \varphi < 2\pi \text{ или } -\frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{3\pi}{2}\right),$$

где $\arg z$ – однозначная функция.

Рассмотренные функции связаны соотношением

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Формула Эйлера

Запишем формулу Маклорена для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\begin{array}{l} \cos\varphi = 1 - \dfrac{\varphi^2}{2!} + \dfrac{\varphi^4}{4!} - \dfrac{\varphi^6}{6!} + \ldots \\ + \\ i\sin\varphi = i\left(\varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!} - \dfrac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) \\ \hline \cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + (i\varphi) - \dfrac{\varphi^2}{2!} - i\dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^4}{4!} + i\dfrac{\varphi^5}{5!} - \ldots , \end{array}$$

или с учетом равенств $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...,

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \ldots \quad . \qquad (1)$$

Запишем формулу Маклорена для e^x, где $x = i\varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \ldots \qquad (2)$$

Так как правые части формул (1) и (2) равны, то

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} -$$

– *формула Эйлера.*

По формуле Эйлера (Т) $\Rightarrow$ (П).

$$\boxed{z = r\,e^{i\varphi}} - \qquad (\text{П})$$

– ***показательная форма*** комплексного числа z.

Следствие

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.}$$

Пример

$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Записать это число в трех формах, дать геометрическую интерпретацию.

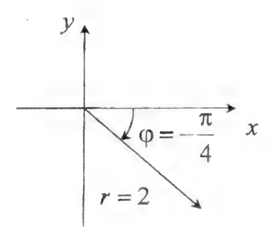
(А): $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

$x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $|z| = r = \sqrt{2+2} = 2$.

$z = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Rightarrow \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arg z = \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

(Т): $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

(П): $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.



Лекция 8. Комплексные числа (продолжение)

Содержание

1. Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме.
2. Комплекснозначная функция действительного аргумента.
3. Многочлены в комплексной области.
4. Корни многочлена.

8.1. Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме

Умножение

Рассмотрим z_1 и z_2 в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))}.$$

Рассмотрим z_1 и z_2 в показательной форме

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}.$$

Вывод

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Деление (без вывода)

В тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

В показательной форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Вывод

Модуль частного комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя.

Возведение в целую степень (обобщение умножения)

В тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$\ldots$$

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ –}$$

– ***формула Муавра***.

В показательной форме

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Сравним последние две формулы

$$e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

С другой стороны,

$$e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n.$$

Следовательно,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Извлечение корня (операция обратная возведению в степень)

Определение

Число b называется ***корнем n-й степени*** из числа z, если $b^n = z$.

Обозначение: $b = \sqrt[n]{z}$.

Пусть $z = re^{i\varphi}$, $b = \rho e^{i\theta}$; r, φ – заданы.

Найдем ρ, θ.

$$b^n = z \Rightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}.$$

Два комплексных числа b^n и z равны, если равны их модули

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},$$

а аргументы могут отличаться на $2k\pi$:

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

$$\boxed{\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}.}$$

Здесь k может принимать любые целые значения, но *различных* (неодинаковых) корней будет только n, и они будут соответствовать значениям $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$b_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$, $k = 0$;

$b_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$, $k = 1$;

$b_2 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)}$, $k = 2$;

...

$b_{n-1} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)}$, $k = n-1$.

Если же, например, $k = n$, то

$b_n = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi n}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{2i\pi} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} = b_0$.

$b_n = b_0$.

Аналогично $b_{n+1} = b_1$ и так далее, что и требовалось доказать.

Вывод

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений:

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Замечание

Числа b_0, b_1, ..., b_{n-1} имеют одинаковый модуль $\sqrt[n]{r}$.

Пример

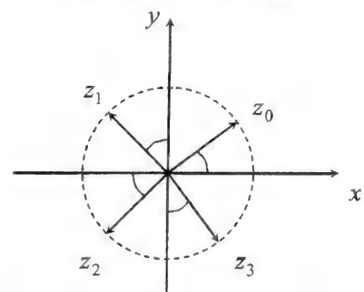
Найдем $\sqrt[4]{i}$.

Обозначим $z = \sqrt[4]{i}$.

$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z=\sqrt[4]{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}}$, $k=0,\,1,\,2,\,3$, $z=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k\right)}$.

Различных значений $\sqrt[4]{i}$ – четыре:

$z_0=e^{i\frac{\pi/2}{4}}=e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)}$, $z_2=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}$, $z_3=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)}$.



Корень z_1 получен из z_0 поворотом на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Корень z_2 получен из z_1 поворотом на $\frac{\pi}{2}$ и т.д.

8.2. Комплекснозначная функция действительного аргумента

Определение

Если каждому действительному t ставится в соответствие комплексное число z, то функция $z=z(t)$ называется ***комплекснозначной функцией*** действительного аргумента.

В алгебраической форме $z(t)=x(t)+iy(t)$.

Так как $z(t)$ соответствует вектору с координатами $x(t)$ и $y(t)$ (см. лекцию 7 п.7.5), то задание функции $z(t)$ эквивалентно заданию вектор-функции скалярного аргумента.

$$\boxed{z'(t)=x'(t)+iy'(t)}\ -$$

– формула дифференцирования комплекснозначной функции.

Пример

$z=e^{i\varphi}$ – комплекснозначная функция, φ – действительный аргумент.

8.3. Многочлены в комплексной области

Рассмотрим многочлен порядка n

$f_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$.

Здесь a_0, a_1, …, a_n – заданные комплексные числа, z – комплексная переменная.

Другой многочлен

$\varphi_m(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_mz^m$.

Пусть $m\le n$.

Так же, как и в элементарной алгебре, справедливо *свойство деления*

$$\boxed{\frac{f_n(z)}{\varphi_m(z)}=Q_e(z)+\frac{R_p(z)}{\varphi_m(z)}}.$$

Здесь $Q_e(z)$ – частное (целая часть дроби),

где $e\le n$,

$$\boxed{e+m=n,}$$

$R_p(z)$ – остаток,

где $p<m$.

Q_e и R_p – многочлены порядка l и p соответственно.

Если $R_p(z)\equiv 0$, то $\dfrac{f_n(z)}{\varphi_m(z)}=Q_e(z)$ или $f_n(z)=\varphi_m(z)Q_e(z)$.

8.4. Корни многочлена

Определение

Корнем многочлена $f_n(z)$ называется число $z=z_0$, удовлетворяющее уравнению $f_n(z)=0$ или в развернутом виде

$$\boxed{a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=0}\ - \qquad (1)$$

– алгебраическое уравнение n-й степени.

Теорема Безу

Остаток, полученный при делении $f_n(z)$ на $(z-a)$ равен $f_n(a)$.

Доказательство

По условию $\varphi_m(z)=\varphi_1(z)=z-a$.

По свойству деления $Q_e(z)=Q_{n-1}(z)$, $R_p(z)=R_0(z)=R_0$,

$f_n(z)=Q_{n-1}(z)\cdot(z-a)+R_0$.

Положим $z=a$, тогда последнее равенство $\boxed{f_n(a)=R_0}$, что и требовалось доказать.

Следствие

Для того чтобы

многочлен $f_n(z)$ делился на двучлен $(z-a)$ без остатка,

необходимо и достаточно, чтобы

$z=a$ было корнем этого многочлена.

Итак, если $z=z_0$ – корень $f_n(z)$, то $f_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z)$.

Другие корни $f_n(z)$ следует искать из уравнения $Q_{n-1}(z)=0$, что и требовалось доказать.

Определение

Если $f_n(z)=(z-z_0)^k\cdot Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$, то z_0 называется ***корнем кратности*** k многочлена $f_n(z)$.

Основная теорема алгебры многочленов

Многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 1

Если

1) коэффициенты уравнения (*) действительные числа,
2) $z_0=x_0+iy_0$ – корень (*),

то $\bar{z}_0=x_0-iy_0$ – также корень (*).

(Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами появляются сопряженными парами.)

Из теоремы Безу и основной теоремы следует, что всякий многочлен $f_n(z)$ можно разложить на множители $f_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}$.

Здесь z_1 – корень кратности k_1, z_2 – корень кратности k_2, …

$$\boxed{k_1+k_2+\ldots+k_m=n.}$$

Если коэффициенты $f_n(z)$ – действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно-сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение множителей двух типов:

1. *Линейный множитель*

$(z-z_i)^{k_i}$, где z_i – действительный корень кратности k_i.

2. *Квадратичный множитель* с отрицательным дискриминантом

$(z^2+pz+q)^{k_j}$, где p, q – действительные числа, $D=p^2-4q<0$.

$\left(z^2 + pz + q\right) = (z - z_j)(z - z_j^*)$ соответствует паре комплексно-сопряженных корней z_j, z_j^* кратности k_j.

Для доказательства последнего рассмотрим

$(z - z_j)(z - z_j^*) = \left[z - \left(x_j + iy_j\right)\right]\left[z - \left(x_j - iy_j\right)\right] = z^2 - 2x_j z + \left(x_j^2 + y_j^2\right) = z^2 + pz + q$.

$p = -2x_j$, $q = \left(x_j^2 + y_j^2\right)$, $D = p^2 - 4q = 4{x_j}^2 - 4{x_j}^2 - 4{y_j}^2 < 0$, что и требовалось доказать.

III. Интегральное исчисление функции одной переменной

Лекция 9. Неопределенный интеграл

Содержание

1. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Методы интегрирования.
3. Классы интегрируемых функций.

9.1. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и

$$\boxed{F'(x)=f(x).}$$

Примеры

$F(x)=x^2$, $f(x)=2x$, $(-\infty,+\infty)$.

$F(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $(-\infty,+\infty)$.

$F(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(0,+\infty)$.

Теорема

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на (a,b),
то $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C – некоторая константа.

Доказательство

$$F_1'(x)=F_2'(x)=f(x) \Rightarrow F_1'(x)-F_2'(x)=0 \Rightarrow (F_1(x)-F_2(x))'=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Вывод

Если $F(x)$ – первообразная функции для $f(x)$ на интервале (a,b), то $\Phi(x)=F(x)+C$ также первообразная.

Определение

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на интервале (a, b)

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

Замечание

$F'(x) = f(x)$, $d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$.

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$$

Свойства неопределенного интеграла

1°. $dF(x) = f(x)dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3°. $\int [Cf(x)]dx = C\int f(x)dx$.

4°. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\forall \alpha \neq -1)$.
3. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

   $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$, $a \neq 0$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$, $|x| < |a|$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$, $|x|>|a|$, $a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$, $a \neq 0$.

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

14. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

15. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Здесь 11, 12 – формулы «длинного» логарифма, 9 – формула «высокого» логарифма.

9.2. Методы интегрирования

Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема

Если

1. $x=\varphi(t)$ и $x'=\varphi'(t)$ непрерывны,
2. $\exists t=\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция,

то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство

Производная левой части: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Производная правой части: $\left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\cdot dt\right)_x' = \left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\cdot dt\right)_t' \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$

$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$.

Замечание 1

Формулой замены переменной можно пользоваться «слева направо» и «справа налево» (подведение новой переменной под знак дифференциала).

Замечание 2

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Пример 1

$$\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx = \int\sqrt{\sin x}\cdot d\sin x = \updownarrow t=\sin x\updownarrow = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C =$$

$$= \frac{2(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

Пример 2

$$\int\frac{xdx}{x^2+1} = \int\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)'dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \updownarrow t = x^2+1\updownarrow = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Интегрирование по частям

Рассмотрим $d(uv) = (uv)dx = (u'v+v'u)dx = u'vdx + v'udx = vdu + udv$.

Таким образом, $d(uv) = udv + vdu$. Почленное интегрирование последнего равенства приводит к формуле интегрирования по частям

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Rightarrow \boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Пример 1

$$\int x\sin x\,dx = \updownarrow \begin{matrix} u=x, dv=\sin x\,dx \\ du=dx, v=-\cos x \end{matrix} \updownarrow = -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 2

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \updownarrow \begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x, dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x^2}, v=x \end{matrix} \updownarrow = x\operatorname{arctg} x - \int\frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Аналогично поступим в случае произведения многочлена на $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\log x$, e^x.

Замечание

Формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз.

Пример 3

$$\int e^x \cos x\,dx = \updownarrow \begin{matrix} u = e^x,\, dv = \cos x\,dx \\ du = e^x dx,\, v = \sin x \end{matrix} \updownarrow = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx =$$

$$= \updownarrow \begin{matrix} u = e^x,\, dv = \sin x\,dx \\ du = e^x dx, v = -\cos x \end{matrix} \updownarrow = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Обозначим $J = \int e^x \cos x\,dx \Rightarrow J = e^x(\sin x + \cos x) - J \Rightarrow$

$\Rightarrow 2J = e^x(\sin x + \cos x)$.

$J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$.

Интегралы этого типа носят название ***возвратных***.

9.3. Классы интегрируемых функций

I. Простейшие дроби

Определение

Простейшими называются дроби вида

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

где A, M, N, a, p, q – действительные константы;
n – натуральное число, $n > 1$;
$p^2 - 4q < 0$.

Интегрирование простейших дробей

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

$$\boxed{\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.}$$

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$.

$$\boxed{\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.}$$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \updownarrow (x^2+px+q)' = 2x+p \updownarrow = \int \frac{?(2x+p)+?}{x^2+px+q}dx =$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + J.$$

$$J = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \updownarrow \begin{matrix} x^2+px+q = \\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \end{matrix} \updownarrow = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + A^2} =$$

$$= \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{A} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.}$$

IV.

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + I.$$

$$I = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \updownarrow \begin{matrix} \text{заменим } t = x+\frac{p}{2}, \\ a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{matrix} \updownarrow = \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$= \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n$, где $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

Вычислим

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \updownarrow \begin{matrix} u = \dfrac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^n}, dv = dt \\ du = \dfrac{-n2tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n+1}}, v = t \end{matrix} \updownarrow = \frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{\left(t^2 + a^2\right) - a^2}{\left(t^2 + a^2\right)^{n+1}} dt =$$

$$= \frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} - 2na^2 \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n+1}}.$$

Имеем

$$I_n = \frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{t}{2na^2\left(t^2 + a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n} -$$

– ***рекуррентная*** (возвратная) формула с глубиной рекурсии, равной 1.

$$\boxed{I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 4\right)} - ?$$

Решение

$I_1 - ?\ A = 2,\ I_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

$I_2 - ?\ n = 1,\ I_2 = \frac{x}{8\left(x^2 + 4\right)} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C.$

$I_3 - ?\ n = 2,\ I_3 = \frac{x}{16\left(x^2 + 4\right)} + \frac{3}{16}\left(\frac{x}{8\left(x^2 + 4\right)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C.$

II. Рациональные дроби

Определение

Дробь $\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$, где $f_n(x)$, $\varphi_m(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, называется **рациональной**. При этом,

если $n \geq m$, то дробь $\dfrac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$ называется **неправильной**,

если $n < m$ – **правильной**.

Теорема

Всякая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму простейших дробей.

Процедура разложения правильной дроби на сумму простейших

Пусть $\dfrac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

1 этап

Разложим знаменатель $\varphi_m(x)$ на линейные и квадратичные множители:

$$\varphi_m(x) = (x-a_1)^{s_1} \dots (x-a_l)^{s_l} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{t_1} \dots \left(x^2 + p_k x + q_k\right)^{t_k},$$

где a_i – действительный корень $\varphi_m(x)$ кратности s_i, $i = 1, \dots, l$;

$x^2 + p_j x + q_j$ соответствует паре комплексно-сопряженных корней кратности t_j, $j = 1, \dots, k$.

2 этап

Каждому простейшему множителю $\varphi_m(x)$ кратности r соответствует сумма r простейших дробей.

$$(x-a_1)^{s_1} \Leftrightarrow \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{s_1}}{(x-a_1)^{s_1}},$$

$$\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{t_1} \Leftrightarrow \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{t_1} x + C_{t_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1}}.$$

3 этап

Коэффициенты в числителях простейших дробей находятся *методом неопределенных коэффициентов.*

Пример

Разложить дробь $\dfrac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на сумму простейших.

Решение

1. Разложение знаменателя на простейшие множители

$$(x^2-1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

2. Разложение дроби на сумму простейших с неопределенными коэффициентами:

$$(x-1) \Leftrightarrow \frac{A_1}{x-1};$$

$$(x+1) \Leftrightarrow \frac{A_2}{x+1};$$

$$(x-2) \Leftrightarrow \frac{A_3}{x-2};$$

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}.$$

3. Поиск коэффициентов разложения.

Из последнего равенства следует

$$\boxed{x = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1).}$$

Найдем коэффициенты A_1, A_2, A_3.

1 способ

Выделенное равенство справедливо для любого x, в том числе для

$x=-1: \quad -1 = 6 \cdot A_2$,

$x=2: \quad 2 = 3A_3$,

$x=1: \quad 1 = -2A_1$.

Таким образом,

$$\boxed{A_1 = -\frac{1}{2},\ A_2 = -\frac{1}{6},\ A_3 = \frac{2}{3}.}$$

2 способ

Учитывая, что многочлены равны, когда равны коэффициенты перед одинаковыми степенями x, из выделенного равенства получаем систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\ x^1 &: -A_1 - 3A_2 = 1, \\ x^0 &: -2A_1 + 2A_2 - A_3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

решая которую, приходим к результату, полученному в первом способе.

3 способ

Комбинация первого и второго способов.

Пример

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} - ?$$

Решение

1. $x(x^2+1)^2$.

2. $x \Leftrightarrow \frac{A}{x}$,

$$\left(x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow \frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

3. $$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$\boxed{A\left(x^2+1\right)^2+\left(B_1x+C_1\right)x\left(x^2+1\right)+\left(B_2x+C_2\right)x=x^2-1},$$

$x=0$: $A=-1$,

x: $C_1+C_2=0$,

x^2: $2A+B_1+B_2=1$,

x^3: $C_1=0$,

x^4: $A+B_1=0$.

Решая полученную систему, находим

$A=-1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ C_1=0,\ C_2=0$,

$$\boxed{\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}}.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим рациональную дробь $\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$.

$$\int\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}dx-?$$

1. Выделение целой части, если дробь неправильная

$$\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}=Q_l(x)+\frac{R_p(x)}{\varphi_m(x)},$$

где $\frac{R_p(x)}{\varphi_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. Разложение дроби $\frac{R_p(x)}{\varphi_m(x)}$ на сумму простейших.

3. $$\int\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}dx=\int Q_l(x)dx+\int\frac{A_1}{(x-a)}dx+\ldots+\int\frac{B_tx+C_t}{(x^2+px+q)^{\ t}}dx.$$

Вывод

Интеграл от рациональной дроби всегда выражается через элементарные функции: рациональные дроби, арктангенсы и натуральные логарифмы.

Пример 1

$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)} - ?$$

$\dfrac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ – правильная дробь.

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

По свойствам линейности

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx - ?$$

$\dfrac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ – неправильная дробь.

1. Выделение целой части:

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

2. Разложение правильной дроби на сумму простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2};$$

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int xdx - \int\frac{dx}{x} + \int\frac{xdx}{x^2+1} + 2\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Лекция 10. Определенный интеграл

Содержание

1. Классы интегрируемых функций (продолжение).
2. Определенный интеграл.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Теоремы об оценке определенного интеграла

10.1. Классы интегрируемых функций (продолжение)

III. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

1. Интегралы, содержащие произведение тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

1) Пусть n и m – ***четные неотрицательные целые*** числа.
Используется *метод понижения степени* переходом к двойному аргументу.
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Пример

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2) Пусть хотя бы одно из чисел n и m – ***нечетное положительное***.
Метод решения – от нечетной степени отщепляется один сомножитель и заносится под знак дифференциала d, а оставшаяся подынтегральная функция выражается через функцию, стоящую под знаком дифференциала, по формуле

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1.}$$

Пример 1

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x\, dx = -\int \sin^2 x \cos^5 x\ d\cos x =$$

$$= -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^5 x\, d\cos x = \int \left(\cos^7 x - \cos^5 x\right)\, d\cos x = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x\, dx}{\cos^5 x} = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right) d\cos x}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

3) Пусть n и m таковы, что $\boxed{m+n=-2k}$, где $k \in N$.
Метод – используется подстановка $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$ ($\boxed{\operatorname{ctg} x = t}$), с применением формулы $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ($1+\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$).

Пример

$$\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}=\updownarrow\begin{matrix}3-5=-2\\ \operatorname{tg}x=t\end{matrix}\updownarrow=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\operatorname{tg}^3 x\,d\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C.$$

2. Интегралы вида $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$

Метод – переход к сумме функций и сумме интегралов:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x),\\ &\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x),\\ &\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x).\end{aligned}}$$

3. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Здесь $R(\sin x,\cos x)=R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных $u=\sin x$, $v=\cos x$.

Метод – универсальная тригонометрическая подстановка

$$\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.}$$

Рассмотрим

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Формула универсальной тригонометрической подстановки имеет вид

$$\boxed{\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.}$$

Вывод

Универсальная тригонометрическая подстановка сводит исходный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одной переменной t.

Пример

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \updownarrow \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \updownarrow = \int \frac{2\left(1+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)2t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Замечание

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является *четной* функцией аргументов $\sin x$ и $\cos x$ $\left(R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)\right)$, более эффективной является подстановка

$$\boxed{t = \operatorname{tg} x.}$$

Пример

$$\int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} - ?$$

Решение

$$\int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(A^2 \operatorname{tg}^2 x + B^2\right)} = \frac{1}{A^2}\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{B^2}{A^2}\right)} =$$

$$= \updownarrow t = \operatorname{tg} x \updownarrow = \frac{1}{A^2}\int \frac{dt}{\left(t^2 + \dfrac{B^2}{A^2}\right)} = \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B/A}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{B/A} + C = \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\frac{A \operatorname{tg} x}{B} + C.$$

Примеры решений

Пример 1

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\sin x\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}}d\cos x = -\int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} d\cos x +$$

$$+ \int (\cos x)^{\frac{3}{2}} d\cos x = -2(\cos x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}(\cos x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Пример 2

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Пример 3

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x\sin x}}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{\cos^3 x\sin x}}{\cos^2 x}}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=\int\frac{d\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=2\sqrt{\operatorname{tg} x}+C.$$

Пример 4

$$\int\sin 3x\cos^2 5x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right)\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 10x\sin 3x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{4}\int(\sin 13x-\sin 7x)dx=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{28}\cos 7x-\frac{1}{52}\cos 13x+C.$$

IV. Интегрирование некоторых иррациональностей

1. Линейные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где $R(x,y,z,\ldots)$ – рациональная функция своих аргументов, $(ax+b)^{\frac{m_i}{n_i}}$ – *линейные иррациональности* – корни степени n_i (m_i, n_i – целые числа).

Пусть S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, $\frac{m_k}{n_k}$, тогда подстановка

$$\boxed{t^S=ax+b}$$

сводит указанный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одного аргумента t.

Пример

$$\int\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}+1}dx=\updownarrow\frac{1}{2},\frac{3}{4},s=4,t^4=2x-1,x=\frac{t^4+1}{2},dx=2t^3dt\updownarrow=\int\frac{t^2\,2t^3dt}{t^3+1}=$$

$$=2\int\frac{t^2(t^3+1-1)}{t^3+1}dt=2\int t^2dt-2\int\frac{t^2dt}{t^3+1}=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{3}\ln\left|t^3+1\right|+C=$$

$$=\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{3}\ln\left|(2x-1)^{\frac{3}{4}}+1\right|+C.$$

2. Дробно-линейные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где $R(x,y,\dots)$ – рациональная функция своих аргументов,

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}}$ – *дробно-линейная иррациональность.*

Подстановка

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^S},$$

где S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, $\frac{m_k}{n_k}$ –

сводит указанный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одного аргумента t (корни исчезают).

3. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где $\sqrt{ax^2+bx+c}$ – квадратичная иррациональность;

$R(u,v)$ – дробно-рациональная функция своих аргументов.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и заменой

$$\boxed{u=x+\frac{b}{2a}}$$

исходный интеграл сводится к одному из следующих трех типов, которые рационализируются с помощью соответствующих тригонометрических подстановок:

1) $\int R\left(u,\sqrt{l^2-u^2}\right)du \Rightarrow \boxed{u=l\sin t}$;

2) $\int R\left(u,\sqrt{l^2+u^2}\right)du \Rightarrow \boxed{u=l\,tg\,t}$;

3) $\int R\left(u,\sqrt{u^2-l^2}\right)du \Rightarrow \boxed{u=\frac{l}{\cos t}}$.

В результате получается интеграл вида

$$\boxed{\int R(\sin t,\cos t)\,dt}.$$

Пример

$$\int\sqrt{5+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{5-\left(x^2-2x\right)}\,dx=\int\sqrt{5-(x-1)^2+1}\,dx=\int\sqrt{6-(x-1)^2}\,dx=$$

$$=\updownarrow x-1=u,\, dx=du \updownarrow = \int\sqrt{6-u^2}\,du = \updownarrow \begin{matrix} u=\sqrt{6}\sin t \\ du=\sqrt{6}\cos t\,dt,\, t=\arcsin\dfrac{u}{\sqrt{6}} \end{matrix} \updownarrow =$$

$$=\int\sqrt{6-6\sin^2 t}\sqrt{6}\cos t\,dt = 6\int\cos^2 t\,dt = 3\int(1+\cos 2t)\,dt = 3t+\frac{3}{2}\sin 2t + C =$$

$$=3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{2}\sin 2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C = 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{2}\sin 2\alpha + C =$$

$$=3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{x-1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{6}}+C =$$

$$=3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+\frac{x-1}{2}\sqrt{5+2x-x^2}+C.$$

Замечание 1

$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ вычисляется как интеграл от простейшей дроби III.

Замечание 2

$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx$ и $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ проще вычислить, применяя метод интегрирования по частям.

Пример

$$\int\sqrt{6+z^2}dz = \updownarrow \begin{matrix} u=\sqrt{6+z^2},\, dv=dz \\ du=\dfrac{zdz}{\sqrt{6+z^2}},\, v=z \end{matrix} \updownarrow = z\sqrt{6+z^2} - \int\frac{z^2dz}{\sqrt{6+z^2}} =$$

$$= z\sqrt{6+z^2} - \int\frac{(z^2+6)-6}{\sqrt{6+z^2}}dz = z\sqrt{6+z^2} - \int\sqrt{6+z^2}dz + 6\ln\left(z+\sqrt{6+z^2}\right);$$

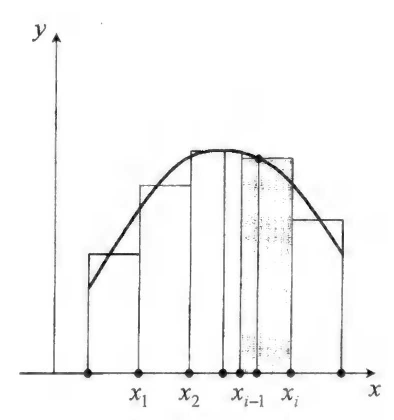
$$\int\sqrt{6+z^2}dz = \frac{z}{2}\sqrt{6+z^2} + 3\ln\left(z+\sqrt{6+z^2}\right)+C.$$

Замечание 3

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{(Mx+N)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(k=1,2)$ эффективна обратная подстановка $\boxed{Mx+N=\frac{1}{t}}$.

10.2. Определенный интеграл

Пусть $f(x)$ – определенная на $[a,b]$ функция.



Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на n отрезков точками
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.
$\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots$; $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – *интегральная сумма* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Интегральная сумма зависит от способа разбиения $[a,b]$ на отрезки и от способа выбора точки ξ_i на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Характеристикой конкретного разбиения является $\max \Delta x_i$.

Рассмотрим различные разбиения, такие, что $\max \Delta x_i \to 0$ ($n \to \infty$). Каждому разбиению соответствует своя сумма S_n.

Таким образом, получаем последовательность интегральных сумм $\{S_n\}$.

Определение

Определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a,b]$ называется число

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)}$$

при условии, что предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения на элементарные отрезки и от выбора фиксированной точки ξ_i (a – ***нижний предел***, b – ***верхний предел*** определенного интеграла).

Определение

Если существует $\int_a^b f(x)dx$, функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на $[a,b]$.

Геометрический смысл определенного интеграла (для $f(x)>0$)

На последнем рисунке $f(\xi_i)\Delta x_i$ – площадь заштрихованного прямоугольника.

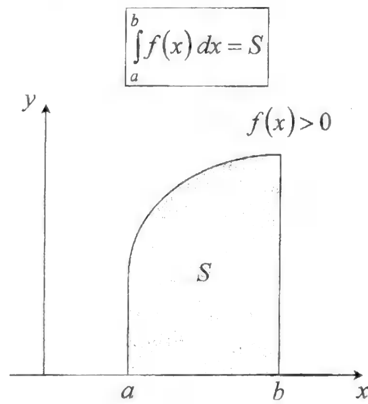
S_n – сумма площадей прямоугольников, т.е. площадь фигуры, ограниченной ломаной линией, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox.

Если $\max\Delta x_i \to 0$, то ломаная стремится к графику $y=f(x)$ и $S_n \to S$ (S – площадь криволинейной трапеции).

Вывод

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)>0$, численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной указанной кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = S}$$



Теоремы существования

Теорема 1

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

то она интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 2

Если $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$ (имеется конечное число точек разрыва первого рода),

то она интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 3

Если $f(x)$ монотонна на $[a,b]$,
то она интегрируема на $[a,b]$.

Замечание 1

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Замечание 2

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Пример

Вычислить $\int_a^b kx dx$ как предел интегральных сумм.

Решение

Пусть $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, тогда

$x_0 = a$,

$x_1 = x_0 + \Delta x$,

$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$,

...

$x_i = x_{i-1} + \Delta x = x_0 + i\Delta x$.

Пусть $\xi_i = x_{i-1}$, т.е. $\xi_1 = x_0$, $\xi_2 = x_1$ и т.д.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} kx_{i-1}\frac{b-a}{n} = \frac{k(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} = \frac{k(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \frac{k(b-a)}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} a + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right\} = \frac{k(b-a)}{n}\left\{na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right\} =$$

$$= \frac{k(b-a)}{n}\frac{an^2 + bn^2 - (b-a)n}{2n}.$$

Пусть $n \to \infty$, тогда

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$,

$\int_a^b kx dx = \dfrac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.

10.3. Свойства определенного интеграла

Свойство 1 (независимость от обозначения переменной)

Независимость величины интеграла от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Свойство 2 (линейность)

Если f_1 и f_2 интегрируемы на $[a,b]$ и A, B – произвольные числа, *то*

$$\int_a^b (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_a^b f_1 dx + B\int_a^b f_2 dx.$$

Доказательство

Для интеграла в левой части

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (Af_1(\xi_i) + Bf_2(\xi_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} Af_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Bf_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= A\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + B\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

По условию

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f_1(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \to \int_a^b f_2(x)dx.$$

Таким образом, существует предел правой части $A\int_a^b f_1 dx + B\int_a^b f_2 dx$ при $\max \Delta x_i \to 0$. Следовательно, существует предел левой части при $\max \Delta x_i \to 0$.

Последний есть $\int_a^b (Af_1 + Bf_2)dx$, что и требовалось доказать.

Свойство 3 (аддитивность)

Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (c \text{ – любое})$$

при условии, что все три интеграла существуют.

10.4. Теоремы об оценке определенного интеграла

Теорема 1 (сохранение интегралом знака функции)

Если

1. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$,
2. $f(x) \geq 0$ для любых $x \in [a,b]$,

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0.}$$

Доказательство

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \geq 0,$$

т.е. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (интегрирование неравенств)

Если

1. $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$,
2. $f(x) \geq g(x)$ для любых $x \in [a,b]$,

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_b^b g(x)\,dx.}$$

Доказательство

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема 3 (теорема об оценке)

Если

1. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
2. m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a,b]$,

то

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).}$$

Доказательство
Из условия $m \le f(x) \le M$ следует

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx .$$

Из линейности

$$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = \updownarrow \text{ из геометрического смысла } \updownarrow = m(b-a).$$

Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения.

Теорема 4 (теорема о среднем)
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
то $\exists c \in [a,b]$ такая, что

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)}$$

или

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,}$$

где $f(c)$ называется ***средним значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Доказательство
Из теоремы об оценке

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M ,$$

в других обозначениях $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$, $m \le \mu \le M$.

Из непрерывности $f(x)$ следует, что существует такая точка $c \in [a,b]$, для которой $f(c) = \mu$, что и требовалось доказать.

Лекция 11. Определенный интеграл (продолжение)

Содержание

1. Производная интеграла по верхнему пределу.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Замена переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование по частям.

11.1. Производная интеграла по верхнему пределу

Рассмотрим отрезок $[a,b]$.
Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, x – произвольная точка отрезка $[a,b]$.
Из интегрируемости $f(x)$ на $[a,b]$ следует интегрируемость $f(x)$ на $[a,x]$.
Можно сказать, что на $[a,b]$ задана функция $F(x)$:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Функция $F(x)$ называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Теорема 1
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
то

$$F'(x)=\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}'=f(x).$$

Доказательство

По определению производной $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$.

$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\updownarrow$ из свойства аддитивности $\updownarrow=$

$=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(\mu)\Delta x$, $x<\mu<x+\Delta x$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\mu)$.

Так как $\mu\to x$ при $\Delta x\to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\mu)=\lim\limits_{\mu\to x} f(\mu)=f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F'(x)=f(x).}$$

Следствие (теорема Коши)
Всякая непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет в этой области первообразную $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, так как первообразная определяется с точностью до константы:

$$\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C},\ C-const.$$

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Доказательство

По теореме Коши из условия непрерывности $f(x)$ следует, что существует

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Положим $x = a \Rightarrow F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C$, т.е. $C = F(a)$.

Таким образом, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$.

Положим в последнем равенстве $x = b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, что и требовалось доказать.

Правило

Для вычисления определенного интеграла нужно:

1) найти $F(x)$,
2) вычислить $F(b) - F(a)$.

Пример 1

$$\int_a^b kx\,dx = k\int_a^b x\,dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Пример 2

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

11.3. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема

Если

1. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
2. $x=g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, где $[a,b]$ – область значений $x=g(t)$ при изменении $t\in[\alpha,\beta]$,
3. $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$,

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt}\,.$$

Доказательство

Рассмотрим левую часть

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

(формула Ньютона-Лейбница). Здесь $F(x)=F(g(t))$.

Вычислим $F_t'=F_x'\cdot x_t'=F'(g(t))\cdot g'(t)$, $F'(g(t))=F'(x)=f(x)=f(g(t))$.

Таким образом, $F_t'=f(g(t))\,g_t' \;\Rightarrow\; F(g(t))$ – первообразная для функции $f(g(t))\,g_t'$ на $[\alpha,\beta]$.

Рассмотрим правую часть

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt=F(g(\beta))-F(g(\alpha)).$$

Таким образом, $\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)dt=F(b)-F(a)$.

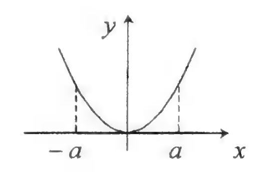
Замечание

Еще раз подчеркнем, что при замене переменной в определенном интеграле особое внимание нужно уделять определению новых пределов интегрирования.

Интегралы от четных и нечетных функций на $[-a,a]$

1. $f(x)$ – четная функция ($f(-x)=f(x)$).

Пример



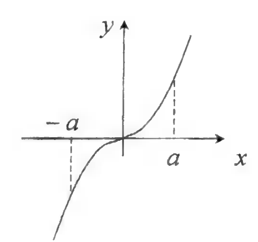
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \updownarrow \begin{matrix} x=-t,\, -a=-\alpha,\, 0=-\beta \\ dx=-dt,\, \alpha=a,\, \beta=0 \end{matrix} \updownarrow = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$$

2. $f(x)$ – нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$).

Пример



$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \updownarrow \begin{matrix} x=-t,\, -a=-\alpha,\, 0=-\beta \\ dx=-dt,\, \alpha=a,\, \beta=0 \end{matrix} \updownarrow = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{a}^{0} f(t)\,dt =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

11.4. Интегрирование по частям

Теорема

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a,b]$ непрерывные производные,

то $\int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\,dx$

или, так как $v'(x)\,dx = dv$, $u'(x)\,dx = du$,

$$\boxed{\int_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_{a}^{b} v\,du .}$$

Доказательство

$(uv)' = u'v + uv'$,

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b (uv)' dx,$$

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b,$$

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, что и требовалось доказать.

Пример

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \updownarrow \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = x \end{matrix} \updownarrow = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Лекция 12. Геометрические приложения определенного интеграла

Содержание

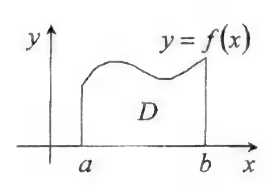
1. Вычисление площадей плоских фигур.
2. Вычисление объемов тел.
3. Вычисление длины дуги кривой.
4. Площадь поверхности вращения.

12.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Границы фигуры заданы в прямоугольных координатах

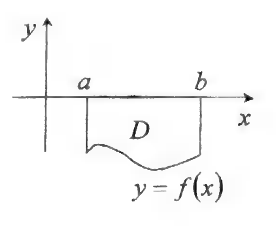
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

1)



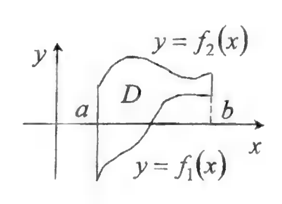
$$S_D = \int_a^b f(x)dx$$


2)



$$S_D = -\int_a^b f(x)dx$$

3)



$$S_D = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Пусть $f(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

1')

y

d

D

$x = f(y)$

c

x

$$S_D = \int_c^d f(y)\,dy$$

Пункты 2') и 3') аналогичны 2) и 3).

2. Границы фигуры заданы параметрическими уравнениями

Обратимся к задаче 1). Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$a = x(\alpha),\ b = x(\beta),$

$$S_D = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx = \updownarrow\ x = x(t),\ dx = x'(t)\,dt\ \updownarrow = \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt.$$

$$\boxed{S_D = \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt}$$

Пример

Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

а) Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зависимость y от x в явном виде:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Учитывая симметрию эллипса, вычисление всей площади можно свести к вычислению площади его части, лежащей в первой четверти.

$$S_{эл-са} = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \updownarrow \begin{matrix} x = a\sin t \\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \updownarrow = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = (2abt + ab\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

.

$$\boxed{S_{эл-са} = \pi ab}$$

б) Параметрические уравнения эллипса:

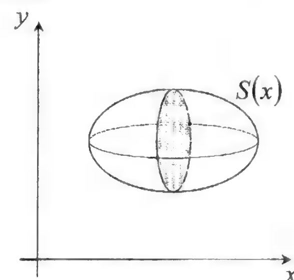
$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$$

$$S_{эл-са} = 4S = 4\int_0^{\pi/2} ab\cos^2 t\,dt = \pi ab.$$

12.2. Вычисление объемов тел

1. По заданным площадям поперечных сечений

Пусть имеем некоторое тело T.



Предположим, что известна площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т.е. является функцией x:

$$S = S(x).$$

Пусть $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ точками деления:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Через точку ξ_i проведем сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Площадь полученного поперечного сечения – $S(\xi_i)$.

Составим сумму

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i \text{, где } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

$S(\xi_i)\Delta x_i$ – объем цилиндра с площадью основания $S(\xi_i)$ и высотой Δx_i.

Пусть $\max \Delta x_i \to 0$, тогда $V_n \to V$ (V – объем тела), с другой стороны, $V_n \to \int_a^b S(x)\,dx$.

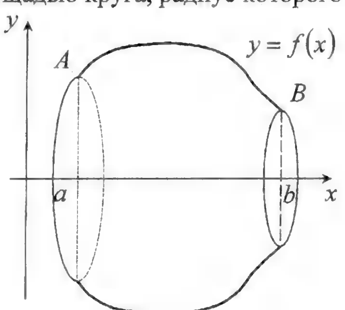
Таким образом,

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

2. Вычисление объема тел вращения

Пусть криволинейная трапеция, лежащая в плоскости $z = 0$, с криволинейной границей $y = f(x)$ вращается вокруг оси Ox. Получается тело вращения. Требуется найти его объем.

Обратимся к рисунку. Очевидно, что площадь поперечного сечения тела вращения является площадью круга, радиус которого зависит от x.



$$V_x = \int_a^b S(x)\,dx = \updownarrow S(x) = \pi f^2(x) \updownarrow = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Аналогично в случае вращения линии вокруг оси Oy

$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d f^2(y)\,dy\,.}$$

Пример 1

Найти объем эллипсоида, поверхность которого задана уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

$$V = 2\int_0^a S(x)\,dx = \updownarrow$$

Для фиксированного x имеем эллипс $\dfrac{y^2}{b_1^2}+\dfrac{z^2}{c_1^2}=1$, где $b_1 = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$,

$c_1 = c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллипса

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$\updownarrow = 2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc\,.$$

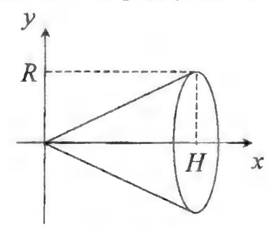
$$\boxed{V_{эл-да} = \frac{4}{3}\pi abc}$$

В частности, объем сферы

$$\boxed{V_{сферы} = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Пример 2

Найти объем конуса с высотой H и радиусом основания R.



Данное тело получено путем вращения прямоугольного треугольника с гипотенузой

$$y = \frac{R}{H}x \ \ (0 \le x \le H)$$

вокруг оси Ox. Таким образом,

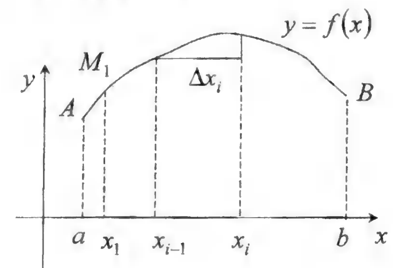
$$V_x = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H .$$

$$\boxed{V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

12.3. Вычисление длины дуги кривой

1. Длина дуги плоской кривой, заданной в прямоугольной системе координат

Рассмотрим линию L: $y = f(x)$ ($a \le x \le b$).



Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b .$$

На кривой этим точкам будут соответствовать точки A, M_1, …, M_{n-1}, B. Соединим их хордами, в результате получим ломаную линию.

Из прямоугольного треугольника находим

$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$ – длина i хорды.

$l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i$ – длина ломаной.

$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – по теореме Лагранжа.

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} .$$

Пусть $\max \Delta x_i \to 0$, тогда $l_n \to l$. С другой стороны, $l_n \to \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Таким образом,

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .}$$

2. Длина дуги плоской кривой в параметрической форме

Рассмотрим дугу линии L на отрезке $[a,b]$.

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta,\ (a = x(\alpha),\ b = x(\beta)).$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'_x]^2}\,dx = \Updownarrow x = x(t),\ dx = x'dt \Updownarrow = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [y'_x]^2}\,x'dt = \Updownarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \Updownarrow =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2}\,dt.$$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2}\,dt.}$$

3. Длина дуги пространственной кривой в параметрической форме

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta.$$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2 + [z'_t]^2}\,dt.}$$

Пример 1

Найти длину дуги кривой $L:\ y = \ln(1 - x^2)$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$l = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}\,dx = \left[-x + \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

Пример 2

Найти длину одного витка винтовой линии $L:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = \dfrac{c}{2\pi}t. \end{cases}$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4\pi^2}}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4\pi^2}}.$$

Дифференциал длины дуги кривой

При вычислении длины дуги кривой $f(x)$ на отрезке $[a,x]$ (x – произвольная точка) длина дуги становится функцией от x:

$$l(x)=\int_a^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Используя производную интеграла с переменным верхним пределом, найдем производную данной функции

$$l'(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

Отсюда находим дифференциал длины дуги кривой

$$\boxed{dl(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

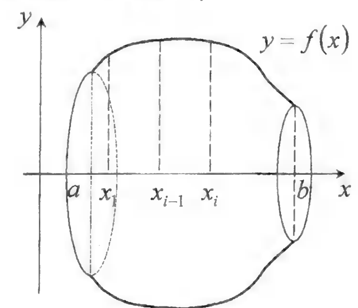
или в параметрической форме

$$\boxed{dl(t)=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.}$$

12.4. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим поверхность Q_x, полученную вращением непрерывной линии $y=f(x)$ ($a\le x\le b$) вокруг оси Ox. Найдем ее площадь.

Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ точками x_i ($i=0$, 1, …, n). Точкам x_i на кривой будут соответствовать точки M_i.



Соединим последовательно точки M_i хордами. Вращая хорду вокруг оси Ox, получим боковую поверхность усеченного конуса. Площадь боковой поверхности i усеченного конуса равна

$$Q_i=\pi(y_{i-1}+y_i)\,l_i=\pi(y_{i-1}+y_i)\Delta x_i\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}.$$

Объем боковой поверхности тела, полученного при вращении всех хорд, равен

$$Q_n=\sum_{i=1}^{n}Q_i.$$

Если $\max\Delta x_i\to 0$, то $Q_n\to Q_x$. Но, учитывая что $Q_n=\sum_{i=1}^{n}Q_i$,

$Q_n\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. Таким образом,

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Лекция 13. Дифференциальные характеристики кривых

Содержание

13.1. Введение

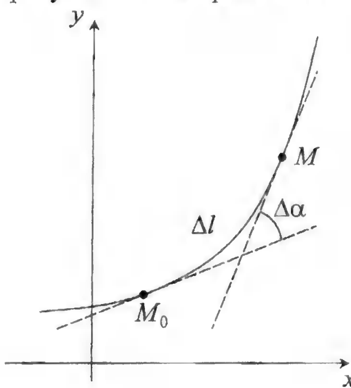
Длина дуги кривой – ее *интегральная характеристика* (характеризует кривую в целом). Во многих задачах нужно знать особенности данной кривой в отдельных точках – *дифференциальные характеристики кривой.*

Рассмотренный на прошлой лекции дифференциал длины дуги $dl(x)$ – дифференциальная (точечная) характеристика кривой.

Другая дифференциальная характеристика – *кривизна кривой*, характеризует степень изогнутости кривой в каждой точке.

13.2. Кривизна кривой

Рассмотрим гладкую кривую без самопересечений.



На этом рисунке $\Delta\alpha$ – угол поворота касательной к кривой при переходе от точки M_0 к точке M; Δl – длина дуги $\overset{\smile}{M_0M}$.

Из двух дуг, имеющих одинаковую длину Δl, более изогнута та, для которой $\Delta\alpha$ имеет большее значение.

Определение

Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ дуги $\overset{\cup}{M_0M}$ называется отношение угла $\Delta\alpha$ к Δl – длине дуги $\overset{\cup}{M_0M}$:

$$\boxed{K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.}$$

Определение

Кривизной кривой в точке M_0 называется число

$$K = \lim_{M \to M_0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|,$$

т.е.

$$\boxed{K = \left| \frac{d\alpha}{dl} \right|,}$$

$$\boxed{K = \lim_{M \to M_0} K_{\text{ср}}.}$$

Рассмотрим параметрические уравнения кривой

$$L: \begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \\ z = z(l), \end{cases}$$

где параметр l – длина дуги кривой.

Эта кривая является годографом вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(l)$:

$$\vec{r} = (x(l), y(l), z(l)).$$

Вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ направлен по касательной к линии L, отсюда следует

$$\boxed{K = \left| \frac{d^2\vec{r}}{dl^2} \right|.}$$

Формулы кривизны плоской кривой

а) *Кривая задана уравнением в декартовых переменных в явной форме.*

$\boxed{L: y = f(x)}$, K – ?

$K = \left| \dfrac{d\alpha}{dl} \right|$; из геометрического смысла производной $\alpha = \operatorname{arctg} y'$.

Следовательно, $\dfrac{d\alpha}{dl} = \dfrac{d\alpha / dx}{dl / dx} = \dfrac{d \operatorname{arctg} y' / dx}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \dfrac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$

Окончательно

$$\boxed{K = \left|\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}\right|}.$$

б) *Кривая задана параметрическими уравнениями*

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Используя правила дифференцирования функции, заданной параметрически,

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)},\ y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3},$$

для коэффициента кривизны получаем формулу

$$\boxed{K = \left|\frac{y''x' - y'x''}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}\right|}$$

или

$$\boxed{K = \left|\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ y'' & x'' \end{vmatrix}}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}\right|}.$$

Пример 1

Найти кривизну прямой линии в любой точке.

$L:\ y = x$.

Решение

$y'' = 0 \Rightarrow K = 0\ \forall x$.

Пример 2

Найти кривизну окружности в любой точке x.

Решение

$$L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

$x' = -R\sin t$, $x'' = -R\cos t$,

$y' = R\cos t$, $y'' = -R\sin t$.

$(x')^2 + (y')^2 = R^2$,

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = R^2.$$

$$\boxed{K=\frac{1}{R}}\ \forall x.$$

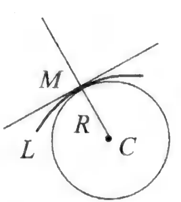
Окружность и центр кривизны плоской кривой

Определение

Величина R, обратная кривизне K линии в данной точке M, называется ***радиусом кривизны*** этой линии в рассматриваемой точке.

$$\boxed{R=\frac{1}{K}}$$

Сделаем чертеж.



В сторону вогнутости по нормали откладываем отрезок длиной R. Фиксируем точку $C(\alpha,\beta)$. Проводим окружность с центром в точке C радиуса R. $C(\alpha,\beta)$ принадлежит нормали к кривой в точке M, отложена на расстоянии R от точки M в сторону вогнутости кривой L.

Определение

Точка $C(\alpha,\beta)$ называется ***центром кривизны*** линии L в точке M.

Определение

Окружность, проходящая через точку M, имеющая центр в центре кривизны и радиус, равный радиусу кривизны линии L, называется ***окружностью кривизны*** линии L в точке M.

Формулы для нахождения координат центра кривизны

Две неизвестные величины будем искать из двух условий.

1. Точка $C(\alpha,\beta)$ принадлежит нормали, проходящей через точку $M(x,y)$,

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

где (X,Y) – координаты точки нормали. Следовательно,

$$\boxed{\beta-y=-\frac{1}{y'}(\alpha-x).}$$

2. Точка $C(\alpha,\beta)$ удалена от точки $M(x,y)$ на расстояние R:

$$\boxed{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=R^2.}$$

Получена система из двух уравнений:

$$\begin{cases}\beta - y = -\dfrac{1}{y'}(\alpha - x),\\ (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2.\end{cases}$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{R^2 y'^2}{1+y'^2} \Rightarrow \alpha = x \pm \frac{y'R}{\sqrt{1+y'^2}},\ \beta = y \mp \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

После подстановки значения R имеем

$$\alpha = x \pm \frac{y'\left|1+y'^2\right|}{|y''|},\ \beta = y \mp \frac{1+y'^2}{|y''|}.$$

Раскрыв модуль, с учетом того, что точка C отклоняется в сторону вогнутости линии L (см. чертеж), получим

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ \beta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}.\end{aligned}}$$

Если $L: \begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t),\end{cases}$ то

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{y''x' - y'x''},\\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{y''x' - y'x''},\end{aligned}}$$

где $x' = x'(t),\ x'' = x''(t)$.

Эволюта и эвольвента плоской кривой

Определение

Эволютой называется линия, описываемая центром кривизны линии L при движении точки по этой кривой.

По отношению к эволюте данная кривая L является ***эвольвентой***.

Формулы для вычисления α и β определяют параметрические уравнения эволюты. Параметром является

x для L: $y = f(x)$,

t для L: $\begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t).\end{cases}$

Пример.

Найти уравнение эволюты эллипса.

Уравнения эллипса в параметрической форме

$$L:\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Выполним необходимые вычисления

$$y''x' - y'x'' = ab\,,$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\,,$$

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t}{ab}\left[a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right] =$$

$$= a\cos t - a\cos t\left[1 - \left(\cos^2 t - \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t\right)\right] =$$

$$= \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t\,.$$

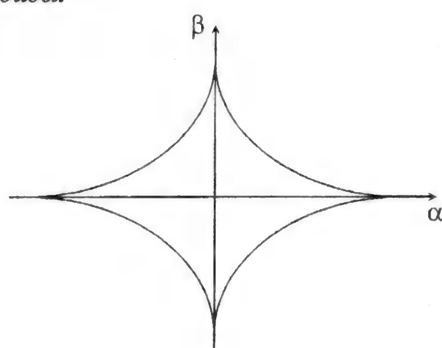
Таким образом,

$$\begin{cases} \alpha = \left(a - \dfrac{b^2}{a}\right)\cos^3 t, \\ \beta = \left(b - \dfrac{a^2}{b}\right)\sin^3 t. \end{cases}$$

Получены параметрические уравнения эволюты.
Исключим параметр t

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}} -$$

– уравнение ***астроиды.***



Формула для вычисления кривизны пространственной кривой

$$K = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

Здесь

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t), z(t)\right) \Leftrightarrow L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

IV. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекция 14. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Содержание

1. Основные понятия.
2. Типы дифференциальных уравнений первого порядка.

14.1. Основные понятия

Определение

Функциональное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

которое связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Определение

Решением (частным) уравнения (1) или (2) на интервале (a,b) называется любая функция, которая обращает уравнение в тождество или верное равенство для любого $x \in (a,b)$.

Определение

Уравнение вида $\Phi(x, y) = 0$, которое ***неявно*** определяет частное решение, называется ***частным интегралом дифференциального уравнения***.

Определение

На плоскости OXY уравнение вида $\Phi(x, y) = 0$ задает кривую, называемую ***интегральной кривой*** дифференциального уравнения (график частного решения).

Определение

Общим решением уравнения (1) или (2) на интервале (a,b) называется функция $y = f(x, C)$, которая является решением уравнения $\forall C \in \mathbb{R}$.

Определение

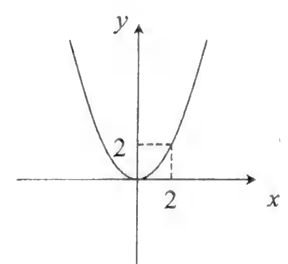
Уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, которое ***неявно*** определяет общее решение, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Замечание

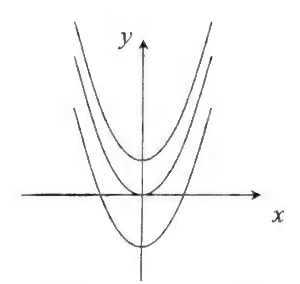
На плоскости OXY уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$ (или $y = f(x, C)$) задает ***семейство интегральных кривых***.

Пример

$y' = x$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.



$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$$



Задача Коши

Пусть

1) $y' = f(x, y)$ – дифференциальное уравнение первого порядка,
2) $y(x_0) = y_0$ – начальное условие.

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрический смысл

Найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Теорема Коши (теорема о существовании и единственности решения задачи Коши)

Теорема

Если

1. $y' = f(x,y)$,
2. $f(x,y)$ – функция, непрерывная в некоторой плоской области D, имеющая в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x,y)$,

то для любых (x_0, y_0), принадлежащих D, в некотором интервале $x_0 - h < x < x_0 + h$ существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл Теоремы Коши

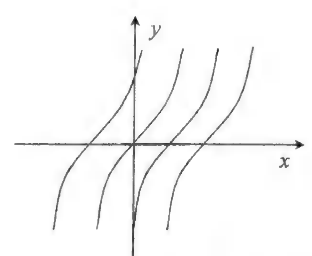
1. Через каждую точку M_0 области D проходит только ***одна*** интегральная кривая уравнения $y' = f(x,y)$.

2. ***Особая точка*** дифференциального уравнения – точка (x,y), в которой нарушается единственность решения задачи Коши.

Особое решение ни при каком значении C не содержится в общем, каждая точка этого решения является особой.

Пример

$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.



$y = (x + C)^3$ – общее решение, $y = 0$ – особое решение.

Замечание

Типы задач, связанных с одним дифференциальным уравнением:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.
2. Решить задачу Коши.
3. Решить дифференциальное уравнение (найти все решения: общее и все особые решения).

14.2. Типы дифференциальных уравнений первого порядка

I. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение

Дифференциальное уравнение вида $y' = f_1(x)f_2(y)$ называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Метод решения

1. Разделение переменных (в левую часть уравнения записать все сомножители, зависящие от одной переменной, а в правую – все от другой).
2. Интегрирование полученного равенства.

Пример 1

$y' = x(y^2 + 1)$.

Найти общее решение.

Решение

Данное ДУ с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = x\left(y^2 + 1\right)$, $\frac{dy}{y^2 + 1} = x\,dx$ – переменные разделены.

$\int\frac{dy}{y^2 + 1} = \int x\,dx$.

$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C$ – общий интеграл.

$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ – общее решение.

Пример 2

$y' = \frac{y}{x}$.

Найти общее решение.

Решение

Данное ДУ с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$.

$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ – общий интеграл.

$y = Cx$ – общее решение.

II. Однородные дифференциальные уравнения

Определение

Дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называется ***однородным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Метод решения

Подстановка

$$\boxed{U(x) = \frac{y}{x},}$$

при которой $y = Ux$, а $y' = U'x + U$ сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными для функции U.

Пример 1

$y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right),\ y(1) = 1.$

Найти y.

Решение

Данное ДУ первого порядка – однородное.

$U = \frac{y}{x},\ y' = U'x + U\ \Rightarrow\ U'x + U = U(\ln U + 1).$

$U' = \frac{U\ln U}{x}.$

$\int\frac{dU}{U\ln U} = \int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln\ln U = \ln x + \ln C.$

$\ln U = Cx,\ U = e^{Cx}.$

$y = xe^{Cx}$ – общее решение.

$C: \begin{cases} y(1) = 1\cdot e^{C\cdot 1}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

$C:\ 1 = 1\cdot e^{C\cdot 1}\ \Rightarrow\ C = 0.$

$\boxed{y = x}$ – искомое решение задачи Коши.

Пример 2

$(x + y)\,dx + x\,dy = 0.$

Найти общее решение.

Решение

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x}.$

$\frac{dy}{dx}=-1-\frac{y}{x}$ – дифференциальное уравнение второго типа однородное.

$U=\frac{y}{x}$, $y'=U'x+U \Rightarrow U'x+U=-1-U$.

$U'x=-1-2U$.

$\frac{dU}{1+2U}=-\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dU}{1+2U}=-\int\frac{dx}{x}$.

$\frac{1}{2}\ln|1+2U|=-\ln x+\ln C$.

$1+2U=\frac{C}{x^2}$.

$y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{2x}$.

Замечание 1

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{a_1x+b_1y} \qquad (*)$$

однородное, так как оно эквивалентно $\frac{dy}{dx}=\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$.

Замечание 2

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \qquad (**)$$

приводится к однородному заменой

$$\boxed{x=U+\alpha,\ y=V+\beta}, \text{ если } \frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}.$$

Числа α, β таковы, чтобы (**) $\Rightarrow$ (*) относительно U и V.

Если $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, замена $U=a_1x+b_1y$ приводит исходное дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

III. Линейные дифференциальные уравнения

Определение

Дифференциальное уравнение вида $y'=P(x)y+Q(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Метод решения

Подстановка Бернулли

$$\boxed{y = U \cdot V},$$

где U, V – функции аргумента x.

После подстановки в исходное уравнение получаем

$$U'V + UV' - P(x)UV - Q(x) = 0.$$

(1) (2)

Пусть

$$U'V - P(x)UV = 0. \qquad (1)$$

После уединения U'

$$\boxed{U' = P(x)U} \qquad (1^*)$$

получено уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $U_1(x)$ – любое частное решение уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$UV' - Q(x) = 0, \qquad (2)$$

куда подставим решение уравнения (1) $U_1(x)$. В итоге получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно множителя $V(x)$:

$$V' = \frac{Q(x)}{U_1(x)}. \qquad (2^*)$$

Пусть найдено $V(x,C)$ – общее решение уравнения (2). Тогда

$$\boxed{y = U_1(x)\,V(x,C)} \; -$$

– искомое общее решение исходного линейного уравнения.

IV. Уравнения Бернулли

Определение

Дифференциальное уравнение вида $y' = P(x)y + Q(x)y^m$ $(m \neq 0,\; m \neq 1)$ называется ***уравнением Бернулли***.

Метод решения

Уравнение Бернулли похоже на линейное уравнение и решается подстановкой Бернулли

$$\boxed{y = U\,V.}$$

Пример 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+1}y + (x+1)^3.$$

Найти общее решение.

Решение

Данное ДУ первого порядка – линейное. Применяем подстановку Бернулли $y = UV$. Получаем

$$U'V + UV' - \frac{2}{x+1}UV - (x+1)^3 = 0.$$

1) $U : U' = \frac{2}{x+1}U$,

$\int\frac{dU}{U} = \int\frac{2}{x+1}dx$,

$$\boxed{U_1(x) = (x+1)^2.}$$

2) $V : V'(x+1)^2 = (x+1)^3$,

$V' = (x+1)$,

$\int dV = \frac{(x+1)^2}{2} + C$,

$V = \frac{(x+1)^2}{2} + C$.

Окончательно

$$\boxed{y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.}$$

Замечание

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка, требуется:

1) привести уравнение к виду $y' = f(x,y)$;
2) по форме $f(x,y)$ определить тип уравнения и выбрать соответствующую подстановку или приступить к непосредственному интегрированию.

Лекция 15. Дифференциальные уравнения высших порядков

Содержание

3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
4. Линейно зависимые и линейно независимые функции.

15.1. Основные понятия

Определение

Функциональное уравнение вида

$$F\left(x, y, y', ..., y^n\right) = 0 \qquad (1)$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Задача Коши

Найти решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Теорема Коши

Теорема

Если в уравнении (2) функция $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные по x, y, y', …, $y^{(n-1)}$ непрерывны в окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}\right)$,

то существует и единственно решение задачи Коши, поставленной выше.

Чтобы найти решение задачи Коши, нужно сначала найти ***общее решение ДУ***.

Определение

Общим решением уравнения (1) или (2) называется функция $y = (x, C_1, C_2, ..., C_n)$, удовлетворяющая уравнению при любых значениях C_1, C_2, …, C_n.

15.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

I. $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$. Правая часть зависит только от x.

Чтобы найти общее решение, интегрируем ДУ n раз. При этом появляется n констант интегрирования.

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

II. $\boxed{\Phi\left(x, y^{(k)},\ldots,y^{(n)}\right)=0}$. Нет явной зависимости от y, y', …, $y^{(k-1)}$.

Подстановка $\boxed{y^{(k)} = p(x)}$ ***понижает порядок*** уравнения на k единиц:

1) $\Phi\left(x, p, p',\ldots,p^{(n-k)}\right)=0$, $p = p(x, C_1, C_2,\ldots,C_{n-k})$ – общее решение уравнения 1);

2) $y^{(k)} = p(x, C_1, C_2,\ldots,C_{n-k})$ – ДУ типа I.

III. $\boxed{F\left(y, y',\ldots,y^{(n)}\right)=0}$. Нет явной зависимости от x.

Подстановка $\boxed{y' = p(y)}$, при которой $y'' = p'(y)\cdot y'$, $y'' = p'(y)\cdot p$, ***понижает порядок*** уравнения на единицу.

$F\left(y, p, p',\ldots,p^{(n-1)}\right)=0$, $p = p(y, C_1, C_2,\ldots,C_{n-k})$.

IV. $\boxed{\frac{d}{dx}G\left(x, y, y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=0}$. Левая часть уравнения является полной производной по x функции G.

Непосредственное интегрирование ***понижает порядок*** уравнения на единицу.

Пример

$x\,y\,y'' + x(y')^2 = 2y\,y'$, y – ?

Решение

Попытаемся выделить интегрируемые комбинации. Добавим к обеим частям уравнения слагаемое $y\,y'$. Тогда понятен переход к уравнению

$$\{xyy'\}' = \left\{\frac{3}{2}y^2\right\}'.$$

Из равенства производных следует

$$y^2 = \frac{2}{3}xyy' + C_1.$$

Разрешим полученное дифференциальное уравнение первого порядка относительно производной искомой функции

$$y' = \frac{y^2 - C_1}{\frac{2}{3}xy},\quad \frac{ydy}{y^2 - C_1} = \frac{3dx}{2x}.$$

После интегрирования получаем общий интеграл исходного уравнения.

$$\frac{1}{2}\ln\left(y^2 - C_1\right) = \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln C_2.$$

$$\boxed{y^2 = C_1 + C_2x^3}$$

15.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение

Линейным дифференциальным уравнением ***n-го порядка*** называют уравнение вида

$$\boxed{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x).}$$

Определение

Если $\varphi(x) \equiv 0$, то данное линейное дифференциальное уравнение называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)***.

Определение

Если $\varphi(x) \neq 0$, то данное линейное дифференциальное уравнение называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ)***.

Левая часть линейного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$$

в краткой записи обозначается как $L[y]$, где

$$L = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) -$$

– ***дифференциальный оператор***.

Тогда

$$\boxed{L[y] = \varphi(x).}$$

Теорема 1

Дифференциальный оператор L – линейный оператор.

Доказательство

Требуется доказать:

1) $L[y+z] = L[y] + L[z]$;

2) $L[Cy] = C\,L[y]$, $C - const$.

Эти утверждения, которые требуют доказательства, являются следствием свойств производной, так как оператор L – линейная комбинация операций дифференцирования.

Свойства решений ЛОДУ

Рассмотрим ЛОДУ, т.е. $L[y] = 0$.

Теорема 2

Если y_1 – решение ЛОДУ,

то Cy_1 также является решением данного ЛОДУ.

Доказательство
По условию $L[y_1]=0$.
Вычислим $L[Cy_1]$: $L[Cy_1]=C\,L[y_1]=0$ (по теореме 1).
Следовательно, Cy_1 является решением данного ЛОДУ, что и требовалось доказать.

Теорема 3
Если y_1 и y_2 – решения ЛОДУ,
то y_1+y_2 также является решением данного ЛОДУ.

Доказательство
По условию $L[y_1]=0$, $L[y_2]=0$.
Рассмотрим $L[y_1+y_2]$:
$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$ (по теореме 1).
Таким образом, $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]=0$.
Следовательно, y_1+y_2 является решением данного ЛОДУ, что и требовалось доказать.

Следствие
Линейная комбинация решений y_1, y_2, …, y_n ЛОДУ $L[y]=0$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ является решением того же уравнения.

Теорема 4
Если
1. $L[y]=0$,
2. $y(x)=U(x)+iV(x)$ – решение уравнения $L[y]=0$,

то $U(x)$ и $V(x)$ являются решениями уравнения $L[y]=0$.

Утверждение и этой теоремы является следствием линейности оператора L.

15.4.** Линейно зависимые и линейно независимые функции

Определение
Функции y_1, y_2, …, y_n называются ***линейно зависимыми*** (ЛЗ) на (a,b), если существует набор чисел α_1, α_2, …, α_n, среди которых ***не все*** равны нулю, таких, что $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n=0$ на (a,b).

** Этот вопрос особенно важен в курсе линейной алгебры

Определение

Функции y_1, y_2, …, y_n называются ***линейно независимыми*** (ЛНЗ) на (a,b), если $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n=0$ лишь при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ (т.е. ***все*** $\alpha_i=0$).

Теорема 5 (необходимое условие линейной зависимости системы функций)

Если

1. $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на (a,b),
2. $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ дифференцируемы на (a,b) до $(n-1)$-го порядка включительно,

то $W(x)=0$ на (a,b).

Здесь

$$W(x)=W(y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

– определитель Вронского (вронскиан).

Доказательство

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию линейно зависимых функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, где ***не все*** $\alpha_i=0$, дифференцируя которую $(n-1)$ раз, получаем линейную относительно α_i однородную систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'+\alpha_2 y_2'+\ldots+\alpha_n y_n'\equiv 0, \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1''+\alpha_2 y_2''+\ldots+\alpha_n y_n''\equiv 0. \end{cases}$$

Условие «не все $\alpha_i=0$» указывает на нетривиальность решения однородной системы уравнений. Условием существования нетривиального решения является ***равенство нулю главного определителя системы***.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=0,$$ что и требовалось доказать.

Следствие

Если хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$, $W(x_0)\neq 0$,

то функции y_1, y_2, …, y_n являются ***линейно независимыми*** на (a,b).

Пример

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ – ЛЗ или ЛНЗ?

Решение

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ e^x и e^{-x} – ЛНЗ всюду на (a, b), причем a, b – любые.

Теорема о структуре общего решения ЛОДУ

Общим решением ЛОДУ $L[y] = 0$ на (a, b) с $a_i(x)$ непрерывными на (a, b), $a_0(x) \neq 0$ на (a, b), является линейная комбинация

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

n линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами.

Следствие

Максимальное число ЛНЗ решений ЛОДУ равно его порядку.

Определение

Любые n ЛНЗ частных решений ЛОДУ n-го порядка называются его ***фундаментальной системой решений (ФСР)***.

Общее решение ЛОДУ является ***линейной комбинацией решений***, образующих его фундаментальную систему решений.

Пример

$y'' - y = 0$ – ЛОДУ второго порядка, где $y_1 = e^x$ – решение, $y_2 = e^{-x}$ – решение.

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Лекция 16. Дифференциальные уравнения высших порядков (продолжение)

Содержание

1. ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
2. ЛНДУ порядка n.

16.1. ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Определение

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где a_1, a_2, …, a_n – действительные числа, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами***.

Найти общее решение $y_0 = y_0(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ

$$\boxed{y_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k},$$

$\{y_k\}$ – ФСР уравнения (1).

$\{y_k\}$ – ?

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде

$$y = e^{\lambda x},\ y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \Rightarrow (1).$$

После подстановки имеем

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n\right) = 0.$$

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.} \qquad (2)$$

Вывод

Функция $y = e^{\lambda x}$ является решением (1), если λ является корнем уравнения (2), называемого ***характеристическим уравнением*** данного ЛОДУ.

Характеристическое уравнение всегда имеет n корней.

Как по найденным λ_1, λ_2, …, λ_n построить ФСР? Рассмотрим возможные случаи.

1. Все λ_i – разные числа.

а) Все λ_i – ***действительные***, кратность каждого корня равна 1.

Каждому $\lambda_k \Rightarrow y_k$, $y_k = e^{\lambda_k x}$.

$$\boxed{y_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k}$$

б) Среди λ_i есть ***комплексные числа***.

Комплексные корни алгебраических уравнений с действительными коэффициентами всегда появляются сопряженными парами.

Пусть среди различных λ_1, λ_2, …, λ_n имеется

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$,

$\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ – действительные.

$\lambda_1 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$.

$\lambda_2 \Rightarrow y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$.

y_1, y_2 – частные решения линейного однородного ДУ. В дальнейшем, применяя свойства решений ЛОДУ для построения ФСР, будем использовать только вещественные функции. Поэтому паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ поставим в соответствие два вещественных линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

В итоге искомое общее решение принимает вид

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.}$$

2. Среди корней уравнения (2) есть кратные (одинаковые).

а) Пусть ***λ – действительный кратный корень*** (кратность r).

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \lambda$.

Такому корню соответствует r ЛНЗ частных решений.

$\boxed{\lambda \text{ кратности } r} \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x},\ \ldots,\ y_r = x^{r-1}e^{\lambda x}$.

Соответствующий вклад в общее решение уравнения (1)

$$\boxed{\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_r x^{r-1}\right)e^{\lambda x} = P_{r-1}(x)e^{\lambda x}.}$$

б) ***Комплексные кратные***.

Пусть $\lambda = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженная пара корней кратности S.

Такой паре соответствует $2S$ ЛНЗ решений.

$\boxed{\lambda = \alpha \pm i\beta \text{ кратности } S} \Rightarrow$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ y_S = x^{S-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,

$y_{S+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{S+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2S} = x^{S-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \Rightarrow$ вклад в общее решение уравнения (1)

$$\boxed{\left(Q_{S-1}(x)\cos\beta x + R_{S-1}(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x},}$$

где Q_{S-1} и R_{S-1} – произвольные многочлены порядка $S-1$ (разные).

Вывод

Если уравнение имеет k действительных корней кратности $r_1, r_2, \ldots, r_k$ и l комплексно-сопряженных корней кратности $S_1, S_2, \ldots, S_l$, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\boxed{\begin{gathered} y_0 = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)e^{\lambda_k x} + \left(Q_1(x)\cos\beta_1 x + R_1(x)\sin\beta_1(x)\right)e^{\alpha_1 x} + \ldots \\ \ldots + \left(Q_l(x)\cos\beta_l x + R_l(x)\sin\beta_l(x)\right)e^{\alpha_l x} \end{gathered}}$$

Здесь $P_i(x)$ – произвольный многочлен степени $(r_i - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$Q_j(x)$, $R_j(x)$ – произвольные многочлены степени $(S_j - 1)$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

16.2. ЛНДУ порядка n

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \qquad (3)$$

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$$\boxed{y = y_0 + \tilde{y}},$$

y_0 – общее решение соответственного ЛОДУ,
$\tilde{y}$ – любое частное решение данного ЛНДУ.

Как искать $\tilde{y}$? Используются два метода.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

Заметим, что этот метод является универсальным.
Пусть найдено общее решение соответственного ЛОДУ

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

C_i – произвольные постоянные.
В методе Лагранжа искомое $\tilde{y}$ рассматривается в виде

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

$C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots,\ C_n(x)$ – ?
Подчеркнем, что форма $\tilde{y}$ повторяет форму y_0!
Пусть C_i таковы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Здесь y_1, y_2, …, y_n, их производные и $f(x)$ известны,
$C_1'(x),\ C_2'(x),\ \ldots,\ C_n'(x)$ – неизвестны.
Получили линейную неоднородную систему n уравнений с n неизвестными.
Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0.$$

$\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ – ФСР, т.е. ЛНЗ система функций $\Rightarrow$ $\Delta \neq 0$ $\Rightarrow$ существует единственное решение системы $\{C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)\}$.
По найденным $C_i'(x)$ находим $C_i(x) = \int C_i'(x)\,dx$.

Покажем, что $\tilde{y}$ с найденными $C_i(x)$ является частным решением уравнения (3).
Подставим $\tilde{y}$ в уравнение (3), для чего вычислим производные $\tilde{y}$:

$$\begin{array}{r|l} a_n(x) & \tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n, \\ a_{n-1}(x) & \tilde{y}' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + ... + C_n(x)y_n' + \overbrace{(C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n')}^{=0}, \\ ... & ... \\ 1 & \tilde{y}^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + ... + C_n(x)y_n^{(n)} + f(x). \end{array}$$

Группируя слагаемые после подстановки так, чтобы у них был общий множитель $C_i(x)$, убеждаемся в верности равенства

$$C_1(x)\left(a_n y_1 + a_{n-1}y_1' + ... + y_1^{(n)}\right) + ... = f(x).$$

Метод неопределенных коэффициентов

Используется, если коэффициенты левой части уравнения (1) постоянны, а правая часть уравнения $f(x)$ – квазимногочлен.
Итак, рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x), \qquad (4)$$

где $f(x)$ – квазимногочлен, т.е. выражение вида

$$\boxed{(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)\, e^{\alpha x},}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – заданные многочлены степеней n и m соответственно.
Ставится задача найти общее решение уравнения (4).
Решение
а) По теореме о структуре общего решения ЛНДУ

$$\boxed{y = y_0 + \tilde{y},}$$

где

$$\boxed{y_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i\ .}$$

б) Поиск $\tilde{y}$: используется форма – аналог формы правой части уравнения (4).

$$\boxed{\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_S(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_S(x)\sin\beta x\right)}$$

Здесь

α, β находятся из вида функции $f(x)$,

r – кратность характеристического корня $z = \alpha \pm i\beta$ (z составляется по правой части уравнения и сравнивается с характеристическими корня-

ми, возникшими на этапе расчета λ), если z не встречается в списке корней, то $r=0$),
$S=\max\{n,m\}$,
$\widetilde{P}_S$, $\widetilde{Q}_S$ – неизвестные пока многочлены порядка S (коэффициенты этих многочленов подлежат определению, отсюда и название метода).

Пример
$4y''-y=x^3-24x$.
Найти общее решение уравнения.
Решение
Представленное уравнение является ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и многочленом в правой части (многочлен является частным случаем квазимногочлена).
По теореме о структуре общего решения

$$y=y_0+\widetilde{y}.$$

Поиск общего решения соответственного ЛОДУ:

$$y_0:\ 4y''-y=0 \Rightarrow \boxed{y_0=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}}.$$

Поиск частного решения данного ЛНДУ по схеме метода неопределенных коэффициентов ($\alpha=\beta=z=0$; $r=0$; $S=3$):
$\widetilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$,
$\widetilde{y}'=3Ax^2+2Bx+C$,
$\widetilde{y}''=6Ax+2B$.
После подстановки в уравнение $4y''-y=x^3-24x$, путем приравнивания коэффициентов перед одинаковыми степенями переменных находим, что $\widetilde{y}=-x^3$.

Ответ: $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}-x^3$.

Принцип суперпозиций решений

Теорема
Если
1. y_1 – решение ЛНДУ $L[y]=f_1(x)$,
2. y_2 – решение ЛНДУ $L[y]=f_2(x)$,

то y_1+y_2 – решение ЛНДУ $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$.

Программа курса

II семестр

I. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Простые формулы и правила дифференцирования. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производная неявной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Дифференциал функции. Приближенное вычисление малых приращений функции. Дифференциалы высших порядков. Основные теоремы анализа: Ролля, Лагранжа, Коши, Лопиталя. Теорема Тейлора. Оценка остаточного члена. Разложение по формуле Тейлора некоторых функций. Приложения формул Тейлора и Маклорена. Условие монотонности функции. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Первый достаточный признак экстремума. Общая схема отыскания экстремума. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков. Точки перегиба. Общая схема отыскания перегиба. Общая схема исследования функции и построения графика. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

II. Векторные и комплексные функции действительной переменной

Векторная функция скалярного аргумента. Годограф вектор-функции. Предел и непрерывность вектор-функции. Производная вектор-функции. Комплексные числа. Операции над комплексными числами. Комплекснозначная функция действительной переменной. Многочлены в комплексной области. Теорема Безу. Основная теорема алгебры.

III. Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования: замена переменной; по частям. Классы интегрируемых функций:

- простейшие дроби (четыре вида);
- рациональные дроби;
- выражения, содержащие тригонометрические функции;
- выражения, содержащие некоторые иррациональности.

Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Оценки интеграла. Производная

от интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Геометрические приложения определенного интеграла.

IV. Дифференциальные характеристики кривых

Кривизна плоской кривой, заданной различными способами. Окружность и центр кривизны плоской кривой. Эволюта и эвольвента плоской кривой. Кривизна пространственной кривой.

V. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия. Частное решение, частный интеграл, общее решение, общий интеграл. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Геометрический смысл теоремы Коши.

Уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородное, линейное, Бернулли. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка (4 типа). Линейные дифференциальные уравнения высших порядков (ЛДУ). ЛОДУ. Свойства решений ЛОДУ. Линейно независимые функции и линейно зависимые функции. Необходимое условие линейной зависимости системы функций. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ. ЛОДУ с постоянными коэффициентами. ЛНДУ. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных) для отыскания частного решения ЛНДУ. Метод неопределенных коэффициентов для отыскания частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Принцип суперпозиции решений.

Учебное издание

Татьяна Анатольевна Матвеева
Наталия Геннадьевна Рыжкова

Высшая математика

Конспект лекций

Часть II

Редактор *О.В. Байгулова*
Компьютерная верстка *А.С. Щербинина*

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 15.02.2005		Формат 60x84 1/16
Бумага писчая	Плоская печать	Усл. печ. л. 8,02
Уч.-изд. л. 5,8	Тираж 150 Заказ 40	Цена «С»

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Типография научно-исследовательской части ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Т. А. МАТВЕЕВА, Н. Г. РЫЖКОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА